Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

EXAMEN

1. La figura 1 muestra las primeras cinco funciones de un conjunto denominado funciones de Walsh.

1.1 Analice la ortogonalidad y ortonormalidad de las funciones.

1.2 Se desea obtener una aproximación de la función $x(t) = sen2\pi t$ en base a las primeras cinco funciones de Walsh. Proponga una expresión para esta aproximación e indique como obtener los coeficientes de la aproximación. Justifique.

1.3 Obtenga el coeficiente correspondiente a $\phi_1(t)$.

2. La figura 2 muestra un sistema en el que un receptor recibe simultáneamente una señal $x(t)$ y un eco representado por una réplica de $x(t)$, retardada y atenuada. Entonces, la salida del receptor puede expresarse mediante la expresión $s(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$.

2.1 Obtenga y grafique la respuesta del sistema a un escalón unitario, para el caso $\alpha = -0{,}2$, $T_0 = 1\, seg.$

2.2 Suponga que las señales $x(t)$ y $s(t)$ se muestrean con un conversor análogo-digital de período de muestreo $T = 100\, mseg.$ Cuál es la función de transferencia del correspondiente sistema en tiempo discreto?

2.3 Utilice transformada z para obtener la respuesta del sistema de tiempo discreto determinado en 2.2 ante una entrada $x(n) = (0{,}5)^n.$

3. En una unidad de tratamiento intensivo se instala un sistema de monitorización y análisis del estado de salud de los pacientes, para lo cual se miden varias variables y se determina su transformada rápida de Fourier. Suponga que una de estas señales está dada por $x_a(t) = \cos(4000\pi t)\cos(\pi t)$, con el tiempo en seg.

3.1 Qué restricciones presenta la elección del periodo de muestreo T ? Fundamente.

3.2 Si como periodo de muestreo se elige $T = 0{,}2\, mseg.$, determine el mínimo período de observación necesario para que la FFT permita distinguir todas las frecuencias en $x_a(t)$. Justifique.

3.3 Qué condición debe cumplir el computador que realiza el cálculo para que este se efectúe en tiempo real? Plantee su resultado en términos del tiempo necesario para efectuar una operación básica (suma o multiplicación) entre dos números complejos. Asuma que la FFT requiere $N \log_2 N$ operaciones básicas.

Observaciones
Tiempo 2:30 hrs. Responda cada pregunta en hojas separadas. No olvide indicar su nombre en cada hoja. Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

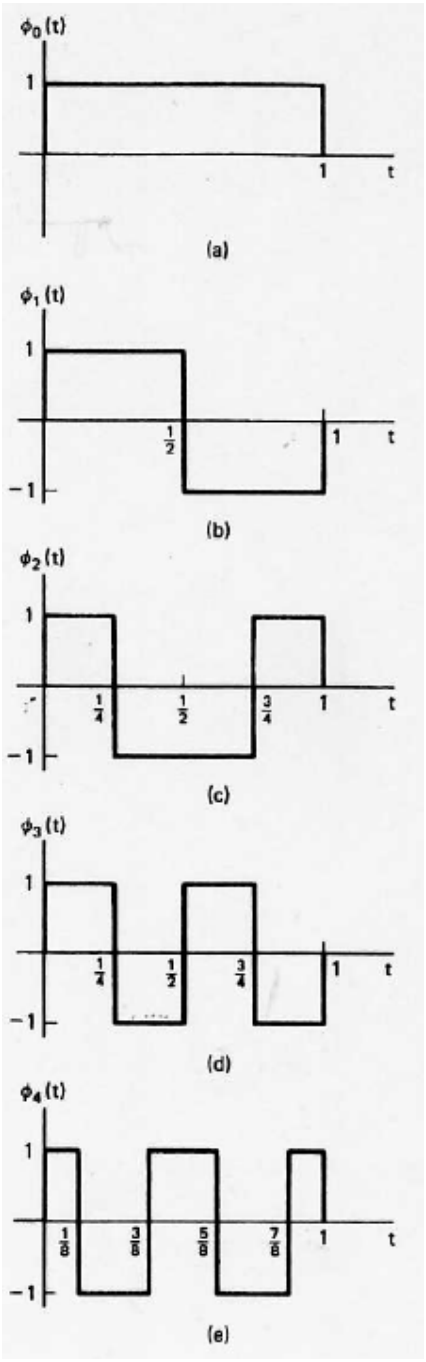


Figura 1

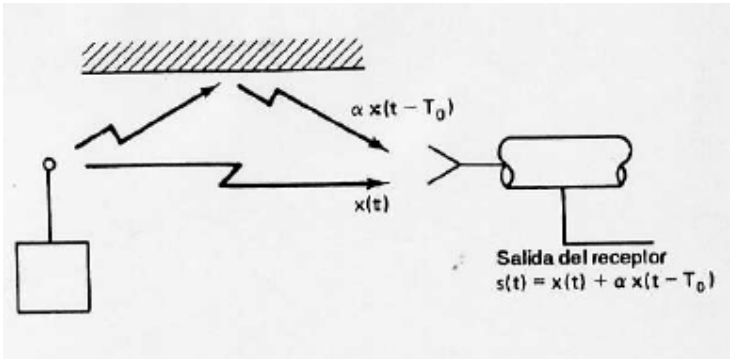


Figura 2

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

PAUTA EXAMEN

PROBLEMA 1

1. La figura 1 muestra las primeras cinco funciones de un conjunto denominado funciones de Walsh.

1.1 Analice la ortogonalidad y ortonormalidad de las funciones.

1.2 Se desea obtener una aproximación de la función $x(t) = sen2\pi t$ en base a las primeras cinco funciones de Walsh. Proponga una expresión para esta aproximación e indique como obtener los coeficientes de la aproximación. Justifique.

1.3 Obtenga el coeficiente correspondiente a $\phi_1(t)$.

Respuesta (2 puntos por parte)

1.1

Se cumple: $\int_0^1 \phi_i(t)\phi_j(t)dt = 0$ para $i \neq j$. Las funciones son ortogonales.

Además: $\int_0^1 [\phi_i(t)]^2 dt = 1$. Las funciones son también de energía unitaria, y en consecuencia ortonormales.

1.2

$$\hat{x}(t) = \sum_0^4 \alpha_i \phi_i(t) = \alpha_0\phi_o(t) + \alpha_1(t) + \cdots \alpha_4\phi_4(t)$$

Los coeficientes α_i se determinan de forma de minimizar la energía del error, esto es:

$$\int_0^1 \left[x(t) - \sum_0^4 \alpha_i \phi_i(t) \right]^2 dt$$

1.3 Como las funciones son ortonormales,

$$\alpha_1 = \int_0^1 x(t)\phi_1(t)dt = \int_0^{1/2} sen(2\pi t)dt - \int_{1/2}^1 sen(2\pi t)dt = \frac{2}{\pi}$$

PROBLEMA 2

2. La figura 2 muestra un sistema en el que un receptor recibe simultáneamente una señal $x(t)$ y un eco representado por una réplica de $x(t)$, retardada y atenuada. Entonces, la salida del receptor puede expresarse mediante la expresión $s(t) = x(t) + \alpha x(t - T_0)$.

2.1 Obtenga y grafique la respuesta del sistema a un escalón unitario, para el caso $\alpha = -0,2$, $T_0 = 1\, seg.$

2.2 Suponga que muestrea las señales $x(t)$ y $s(t)$ con un conversor análogo-digital de período de muestreo $T = 100\, mseg.$ Cuál es la función de transferencia del correspondiente sistema en tiempo discreto?

2.3 Utilice transformada z para obtener la respuesta del sistema de tiempo discreto determinado en 2.2 a una entrada $x(n) = (0,5)^n.$

Respuesta (2 puntos para cada parte)

2.1

Para $x(t) = u(t)$ se cumple:

$$s(t) = u(t) - 0,2u(t-1).$$

Gráfico: $s(0) = 0$; $s(t) = 1$ entre 0 y 1; $s(t) = 0,8$ de 1 a ∞.

2.2

De:

$$s(t) = x(t) - 0,2x(t - 10T)$$

se deduce:

$$s(n) = x(n) - 0,2x(n - 10)$$

Entonces:

$$G(z) = 1 - 0,2z^{-10}$$

2.3

$$S(z) = G(z)X(z) = \left[1 - 0{,}2z^{-10}\right]\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} - \frac{0{,}2z^{-10}}{1-0{,}5z^{-1}}$$

Entonces:

$$s(n) = (0{,}5)^n - 0{,}2(0{,}5)^{n-10} \text{ para } n \geq 10 \text{ -}$$

$$s(n) = (0{,}5)^n \text{ para } 10 > n \geq 0 .$$

PROBLEMA 3

3. En una unidad de tratamiento intensivo se instala un sistema de monitorización y análisis del estado de salud de los pacientes, para lo cual se miden varias variables y se determina su transformada rápida de Fourier. Suponga que una de estas señales está dada por $x_a(t) = \cos(4000\pi t)\cos(\pi t)$, con el tiempo en seg.

3.1 Qué restricciones presenta la elección del periodo de muestreo T? Fundamente su respuesta.

3.2 Si como periodo de muestreo se elige $T = 0{,}2\ mseg.$, determine el mínimo período de observación necesario para que la FFT permita distinguir todas las frecuencias en $x_a(t)$. Justifique.

3.3 Qué condición debe cumplir el computador que realiza el cálculo para que este se efectúe en tiempo real? Plantee su resultado en términos del tiempo necesario para efectuar una operación básica (suma o multiplicación) entre dos números complejos. Asuma que la FFT requiere $N \log_2 N$ operaciones básicas.

Respuesta (2 puntos cada parte)

3.1

Se cumple:

$$x_a(t) = \cos(4000\pi t)\cos(\pi t) = \frac{1}{2}\cos(4001\pi t) + \frac{1}{2}\cos(3999\pi t)$$

Del Teorema de Nyquist, la condición para evitar traslapos $\omega_S \geq 2\omega_B$ implica:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_S} \leq \frac{\pi}{\omega_B} = \frac{\pi}{4000\pi} \leq 0{,}25\ mseg.$$

3.2

El espectro de $x_a(t)$ incluye funciones impulso $\delta(\omega + 4001\pi), \delta(\omega - 4001\pi), \delta(\omega + 3999\pi), \delta(\omega - 3999\pi)$.

Para poder distinguir todas las frecuencias, se requiere obtener una resolución en frecuencia: $\Delta\omega \leq 2\pi\ rad/seg.$, esto es, $\Delta f \leq 1\ Hz$. De aquí: $T_0 = \frac{1}{\Delta f} \geq 1\ seg.$ De $N = \frac{T_0}{T} = \frac{1000}{0{,}2} = 5000$ y la condición $N = 2^b$ se cumple: $b = 13,\ N = 8192,\ T_0 = NT = 1638{,}4\ mseg.$

3.3

Debe cumplirse:

$$T_{calculo} = T_{op} N \log_2 N \leq T_0$$

Entonces:

$$T_{op} < \frac{T_0}{N \log_2 N} = \frac{T}{b} = \frac{0{,}2}{13} mseg = 15 \mu seg.$$