# Prueba 1

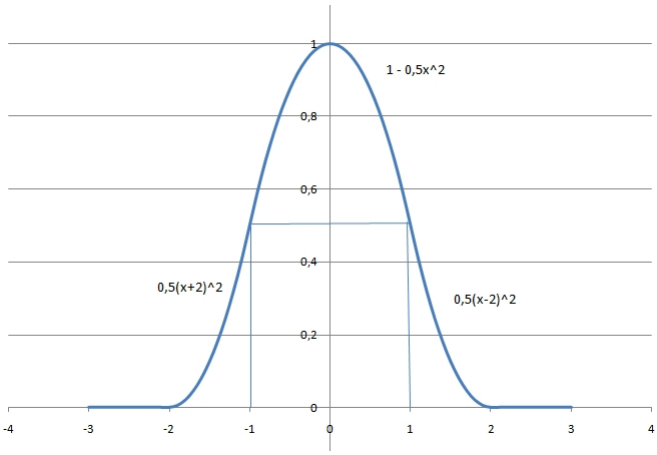
- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

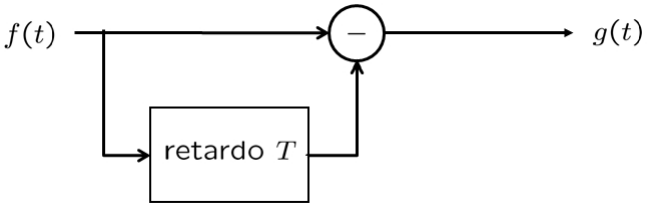
1. [10 ptos] **Convolución.** Grafique precisamente (indicando todos los puntos relevantes y las formas de las curvas, de manera que la función esté precisamente definida):

$$\sqcap(x/2) * \wedge(x)$$

**Resultado:**




2. [10 ptos] **Sistema con retardo.** El sistema de la figura resta de la entrada una versión retardada en $T$ de ella. Indique si el sistema es lineal y/o invariante en el tiempo. Demuestre su respuesta.




**Resultado:** La figura nos indica que la salida es $g(t) = f(t) - f(t-T)$.

(a) Linealidad. El sistema es lineal porque

$$\begin{aligned} S\{af_1(t) + bf_2(t)\} &= af_1(t) + bf_2(t) - (af_1(t-T) + bf_2(t-T)) \\ &= af_1(t) - af_1(t-T) + bf_2(t) - bf_2(t-T) \\ &= a(f_1(t) - f_1(t-T)) + b(f_2(t) - f_2(t-T)) \\ &= ag_1(t) + bg_2(t) \end{aligned}$$

(b) Invariancia. El sistema es invariante porque

$$\begin{aligned} S\{f(t-\Delta)\} &= f(t-\Delta) - f(t-\Delta-T) \\ &= g(t-\Delta) \end{aligned}$$

3. [4 ptos] **Paridad.** Sea $f(x) = \ln x$ y $f(x) \longrightarrow F(u)$. Encuentre

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{Im}\{F(4)\} - \mathrm{Im}\{F(-4)\}\right\}$$

**Resultado:** Sabemos que

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e(x)\cos(2\pi u x)dx - i\int_{-\infty}^{\infty} o(x)\,\mathrm{sen}\,(2\pi u x)dx$$

Es decir

$$\begin{aligned} F(4) - F(-4) &= \int_{-\infty}^{\infty} e(x)\cos(8\pi x)dx - i\int_{-\infty}^{\infty} o(x)\,\mathrm{sen}\,(8\pi x)dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} e(x)\cos(8\pi x)dx - i\int_{-\infty}^{\infty} o(x)\,\mathrm{sen}\,(8\pi x)dx \\ &= -2i\int_{-\infty}^{\infty} o(x)\,\mathrm{sen}\,(8\pi x)dx \end{aligned}$$

Por lo tanto lo único relevante de $f(x)$ es su parte impar. Como sabemos que $\ln x = \ln x$ si $x > 0$ y $\ln x = \ln(-x) + i\pi$ para $x < 0$, entonces su parte impar será siempre imaginaria, es decir $F(4) - F(-4)$ es real, con lo que su parte imaginaria es cero:

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{Im}\{F(4)\} - \mathrm{Im}\{F(-4)\}\right\} = 0$$

4. [4 ptos] **Rampa a rampa.** Un sistema tiene como respuesta al impulso $h(t) = t\sqcap(t)$. Encuentre una entrada $f(t)$ con $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \neq 0$ de manera que la salida $g(t)$ cumpla con la condición $g'(t) = 1$ para $t > T$ (algún $T$).

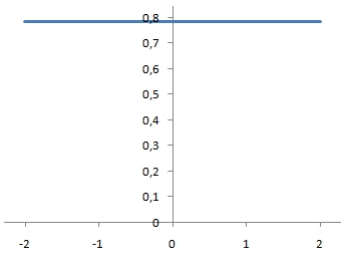
**Resultado:** Obviamente para este problema hay infinitas soluciones. La más simple de todas es notar que la respuesta al impulso tiene derivada igual a 1, por lo que si la entrada es un impulso, se cumplirá $g'(t) = 1$ para $t > 0$. Otra solución interesante es $f(t) = \sqcap(t)$, porque en este caso $g(t) = \sqcap(t) * \sqcap(t) * \sqcap(t)$, y como convolucionar con $\sqcap(t)$ es equivalente a integrar, entonces derivar es sacar una de las convoluciones, con lo que queda $g(t) = t\sqcap(t)$.

5. [4 ptos] **Convolución de $\cos^2$.** Encuentre la expresión más simple posible y grafíquela para

$$\uparrow\uparrow\left(\frac{2x}{\pi} + \frac{1}{2}\right) * \cos^2 x$$

**Resultado:** La función horquilla tiene un impulso en $x = 0$ y otro en $x = -\pi/2$. La magnitud de esos impulsos es $\pi/4$. Es decir, la convolución pedida es

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}\left\{\delta(x+\pi/2)+\delta(x)\right\} * \cos^2 x &= \frac{\pi}{4}\cos^2(x+\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4}\cos^2 x \\ &= \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}^{\,2} x + \frac{\pi}{4}\cos^2 x \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$




6. [4 ptos] **Series de Fourier.** Encuentre los coeficientes de la expansión en series de Fourier de $\cos^2 \pi x$

   **Resultado:** Una forma directa de calcular los coeficientes es notar que

$$\cos^2 \pi x = \frac{1+\cos 2\pi x}{2}$$

   y escribir la expansión de Fourier con $\omega_0 = 2\pi$

$$\cos^2 \pi x = \frac{1+\cos 2\pi x}{2} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi k x + b_k \,\mathrm{sen}\, 2\pi k x)$$

   de donde inmediatamente se puede ver

$$a_0 = a_1 = \frac{1}{2}.$$

   El resto es cero. En su forma compleja los coeficientes son

$$C_0 = \frac{1}{2}$$

   y

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{4}$$