Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 2

17 de Marzo 2023

---

1. [2 Puntos] Determine si el sistema $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ es:

   a) Lineal

   Probamos Homogenidad viendo que:

   $$\mathcal{L}\{\alpha f(x)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\}$$

   En este caso podemos ver que

   $$\mathcal{L}\{\alpha f(x)\} = \frac{\alpha f(x)}{x^2}$$

   Por otro lado

   $$\alpha \mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{\alpha f(x)}{x^2}$$

   Por ende el sistema es homogéneo. Para ver superposición tenemos que ver si

   $$\mathcal{L}\{f_1(x) + f_2(x)\} = \mathcal{L}\{f_1(x)\} + \mathcal{L}\{f_2(x)\}$$

   En este caso se puede ver que

   $$\mathcal{L}\{f_1(x) + f_2(x)\} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{x^2}$$

   y por su parte

   $$\mathcal{L}\{f_1(x)\} + \mathcal{L}\{f_2(x)\} = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{x^2}$$

   Habiendo probado superposición sabemos que el sistema es **LINEAL.**

   b) Invariante

   Para demostrar invarianza queremos ver si:

   $$g(x-a) = \mathcal{L}\{f(x-a)\}$$

   Es fácil notar que

   $$g(x-a) = \frac{f(x-a)}{(x-a)^2}$$

mientras que

$$\mathcal{L}\{f(x-a)\} = \frac{f(x-a)}{x^2}$$

Así se demuestra que el sistema es **VARIANTE**.

c) Estable
El sitema es **INESTABLE** ya que con la entrada acotada $x = 0$ el sistema se diverge.

2. [4 Puntos] Grafique la función $f^{'}(x)$ si:

$$f(x) = [u(x + \frac{\pi}{2}) + u(x)] * \cos^2(x)$$

OJO: El operador $*$ es la convolución.

Comenzamos con la propiedad de derivación de convolución tal que:

$$f'(x) = [u(x + \frac{\pi}{2}) + u(x)]' * \cos^2(x)$$

Dado que la derivada del escalón es un δ. Tenemos que:

$$f'(x) = [\delta(x + \frac{\pi}{2}) + \delta(x)] * \cos^2(x)$$

Por propiedad del cedazo esto es lo mismo que:

$$f'(x) = \cos^2(x + \frac{\pi}{2}) + \cos^2(x)$$

Recordamos que $\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \sin^2(x)$ Por lo que

$$f'(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

El gráfico es constante en 1.