Interrogación 2

◁ *Lunes 10 de octubre, 2009 ⊗ 18:00-19:30* ▷

1. Calcule $z(t) = x \star y(t)$ para las señales:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} |t| + \delta(t), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \\ y(t) &= p(t+1) + 2p(t) + p(t-1) \end{aligned}$$

   donde $p(t)$ es el pulso unitario, $\delta(t)$ es la función impulso de Dirac.

2. Para el sistema de la figura 1:

   (a) Obtenga el operador de transferencia que relaciona la salida $y(t)$ con la entrada $u(t)$. *Nota:* $u(t)$ *es cualquier entrada, no necesariamente un escalón unitario.*.

   (b) Obtenga la ecuación de estado en forma canónica controlable.

   (c) Calcule la matriz de transición de estado.

   (d) Calcule la respuesta del sistema cuando la entrada es $u(t) = t$ y cuando la entrada es $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, con condiciones iniciales x_0 constantes e identicas en ambos bloques integradores.

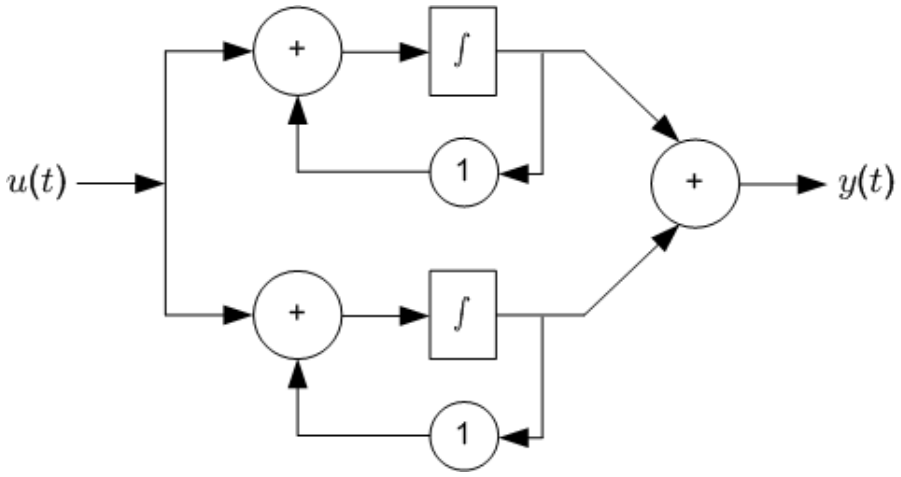


Figura 1: Diagrama de bloques del problema 2.

3. Para el sistema de la figura 2, compuesto de dos procesos descritos por los operadores de transferencia:

$$F_1(s) = \frac{2}{s+1}, \qquad F_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

   (a) Obtenga el operador de transferencia que relaciona la salida $y(t)$ con la entrada $u(t)$. *Nota:* $u(t)$ *es cualquier entrada, no necesariamente un escalón unitario.*.

   (b) Obtenga la ecuación de estado en forma canónica observable.

   (c) Diagrama de bloques en la forma canónica controlable y forma canónica observable.

   (d) Calcule la matriz de transición de estado para el sistema en forma canónica controlable.

   (e) Calcule la respuesta del sistema cuando la entrada es $u(t) = 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$, con condiciones iniciales nulas.

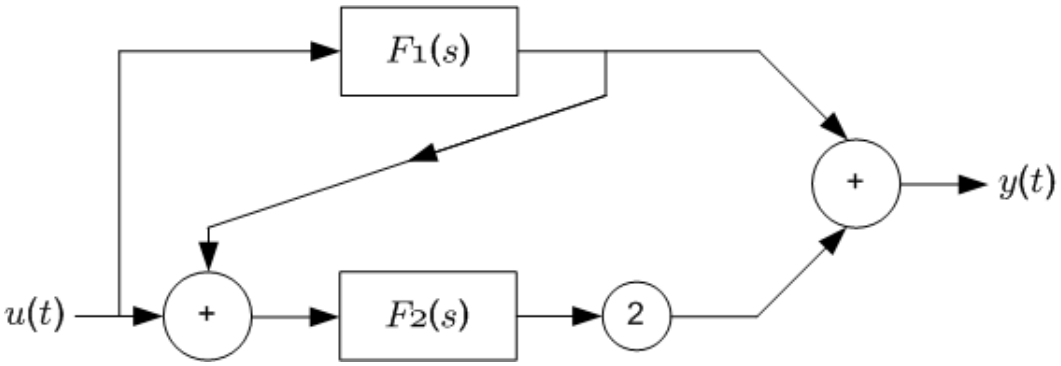


Figura 2: Diagrama de bloques del problema 3.

4. Obtenga una expresión para los coeficientes de la serie de Fourier en cada uno de los siguientes casos y grafique en forma aproximada los espectros bilaterales de amplitud y fase:

   (a) $x(t) = \sum_{k=-infty}^{\infty} p(t+k)$, (tren de pulsos).

   (b) $x(t) = \sum_{k=-infty}^{\infty} \delta(t+kT)$, $T > 0$, (tren de impulsos).

   (c) $z(t) = x(t)y(t)$, con $x(t) = \cos(t)$ y $y(t) = \cos(100t)$, (modulador).

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

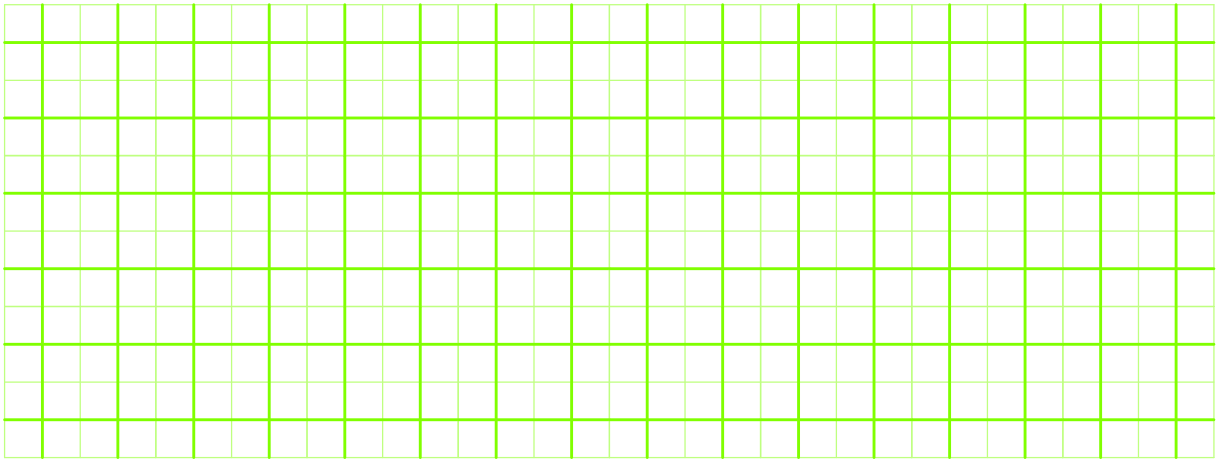


Figura 3: Señales $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ de la pregunta 1.

NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

NOMBRE:

4. Solución Pregunta 4

Pauta Interrogación 2

◁ *Lunes 5 de octubre, 2009 ⊗ 18:00-19:30* ▷

1. Convolución $x \star y(t)$ se encuentra de la siguiente manera.

   (1 pto) Primero notar que por linealidad:

$$\begin{aligned} x \star y(t) &= (|t| + \delta(t)) \star y(t) \\ &= |t| \star y(t) + \delta(t) \star y(t) \\ &= |t| \star y(t) + y(t) \end{aligned}$$

   (0.5 ptos) Ahora como $y(t)$ es la combinación lineal de unos pulsos desplazados, basta calcular $|t| \star p(t)$ y encontrar el resto de la convolución desplazando según corresponda $|t| \star p(t)$, pues recordemos que si $z(t) \stackrel{def}{=} a(t) \star b(t)$, y $c(t) \stackrel{def}{=} b(t-T)$:

$$a(t) \star c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)b(\tau-T)d\tau$$

   con $\tau = \tau' + T$, tendremos

$$a(t) \star c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-T-\tau')b(\tau')d\tau' = z(t-T)$$

   (0.5 ptos) La convolución entre $|t|$ y $p(t)$, se calcula por partes, según se muestra en las figuras 1, 2 y 3. Al desplazar el pulso unitario $p(t)$ es posible verificar que la intersecciones de las áreas bajo $p(t-\tau)$ y $|\tau|$ es nula si $|t| > 1.5$. Luego, hay tres casos:

   - $p(t-\tau)$ traslapa solo el triángulo izquierdo de $|\tau|$.
   - $p(t-\tau)$ traslapa parte del triángulo izquierdo y del derecho de $|\tau|$.
   - $p(t-\tau)$ traslapa solodel triángulo derecho de $|\tau|$.

   Estas situaciones ocurren, respectivamente para valores de t:

   - $-1.5 \leq t \leq -0.5$
   - $-0.5 \leq t \leq 0.5$
   - $0.5 \leq t \leq 1.5$

   (1 pto) Analíticamente $p(t) \star |t|$ en estos tres intervalos estará dado por:

   - $\int_{-1}^{t+1/2} -\tau d\tau = -\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-1}^{t+1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2$, para $t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.
   - $\int_{t-1/2}^{0} -\tau d\tau + \int_{t-1/2}^{t+1/2} \tau d\tau = -\frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1/2}^{0} + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{0}^{t+1/2} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{4}$, para $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
   - $\int_{t-1/2}^{1} \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1/2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$, para $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

   Una manera rápida de calcular estas integrales es notando que, por ejemplo la primera integral, corresponde al área del polígono $ABDC$ en la fig. 4 y que:

$$\begin{aligned} AreaABDC &= Area\triangle AEC - Area\triangle BED \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

dado que los puntos B, D yacen donde acaba el traslape del pulso $p(\tau)$, lo cual ocurre en $\tau = t + \frac{1}{2}$, para $t \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Luego

$$p(t) \star |t| \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2, & -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ t^2 + \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ 0, & |t| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

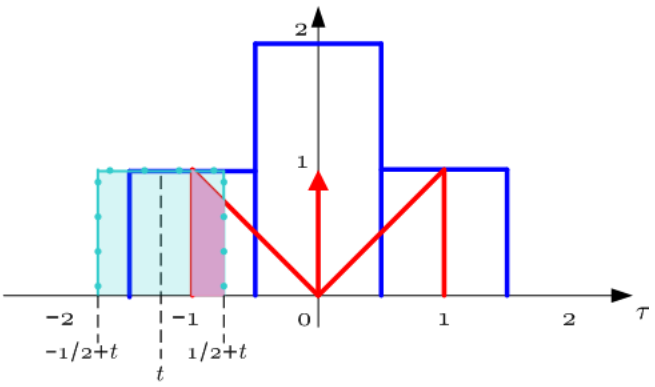


Figura 1: Convolución $p(t) \star |t|$, $-1.5 \leq t \leq -0.5$.

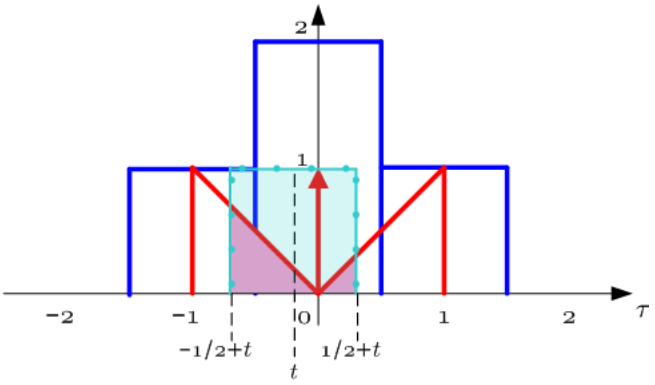


Figura 2: Convolución $p(t) \star |t|$, $-0.5 \leq t \leq 0.5$.

(1 pto) Si se definen:

$$y_1(t) = p(t) \star |t| \tag{1}$$
$$y_2(t) = p(t+1) \star |t| = y_1(t+1) \tag{2}$$
$$y_3(t) = p(t-1) \star |t| = y_1(t-1) \tag{3}$$

Específicamente

$$y_2(t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2, & -\frac{5}{2} \leq t \leq -\frac{3}{2} \\ (t+1)^2 + \frac{1}{4}, & -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t+1| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

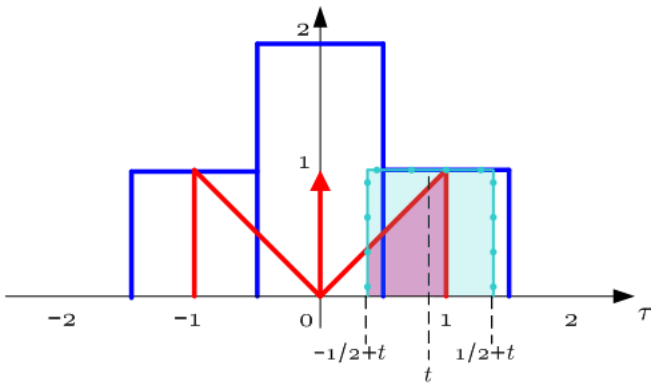


Figura 3: Convolución $p(t) \star |t|$, $0.5 \leq t \leq 1.5$.

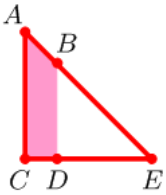


Figura 4: Triángulos $\triangle AEC$, $\triangle BED$ y polígono $ABDC$.

e

$$y_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (t-1)^2 + \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2} \\ 0, & |t-1| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por otro lado:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ 2, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ 0, & |t| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

(1 pto) Entonces

$$z(t) = x \star y(t) = |t| \star y(t) + y(t) = 2y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + y(t)$$

sumando por intervalos esto corresponde a

$$x \star y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2, & -\frac{5}{2} \leq t \leq -\frac{3}{2} \\ 1 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + (t+1)^2 + \frac{1}{4} + 1, & -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ 2t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + (t-1)^2 + \frac{1}{4} + 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2} \\ 0, & |t| > \frac{5}{2} \end{cases}$$

Simplificando las expresiones anteriores se reduce a $x \star y(t)$ se reduce a

$$x \star y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2, & -\frac{5}{2} \leq t \leq -\frac{3}{2} \\ 3 + t, & -\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2} \\ t^2 + 3 + \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 3 - t, & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & \frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2} \\ 0, & |t| > \frac{5}{2} \end{cases}$$

(1 pto) La gráfica de $x \star y(t)$ se muestra en la fig. 5.

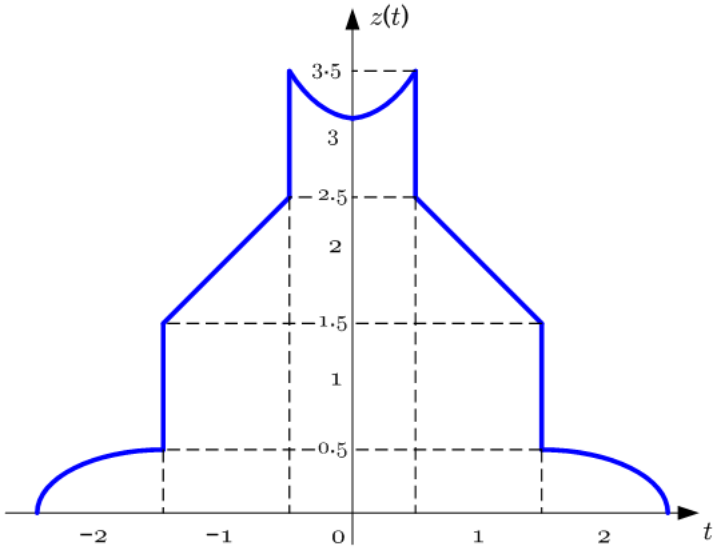


Figura 5: Convolución $x \star y(t)$.

2. (a) (1.5 ptos) Para un integrador, si $\dot{x}_1$ es la entrada al integrador, luego x_1 será su salida. Ahora:

$$\dot{x}_1 = u + x_1 \Rightarrow (s-1)x_1 = u \Rightarrow x_1 = \frac{u}{(s-1)}$$

Similarmente para el otro integrador:

$$\dot{x}_2 = u + x_2 \Rightarrow (s-1)x_2 = u \Rightarrow x_2 = \frac{u}{(s-1)}$$

y la salida

$$y = x_1 + x_2 == \frac{u}{(s-1)} + \frac{u}{(s-1)}$$

Luego

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} = \frac{2}{s-1}$$

■

(b) (1.5 ptos) Sistema descrito mediante ecuaciones de estado.

i. **Solución 1**: Caso ambos integradores "independientes" es el que se obtiene al sumar las fracciones $\frac{1}{s-1}$ sin simplifcar, es decir:

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} = \frac{(s-1)+(s-1)}{(s-1)(s-1)} = \frac{2s-2}{s^2-2s+1}$$

Luego, las ecuaciones en forma canónica controlable estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^c \\ \dot{x}_2^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^c \\ x_2^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^c \\ x_2^c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Observación:

Notar que las ecuaciones originales para cada subsistema en paralelo permiten formular un sistema con ecuaciones en el estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

o matricialmente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sin embargo, la descripción anterior del sistema no corresponde a la forma canónica controlable.

ii. **Solución 2**: Caso ambos integradores colapsados, las ecuaciones en la forma canónica controlable obtenidas a partir operador de transferencia en el punto 2.a:

$$\dot{x}_1 = x_1 + uy \quad = \quad 2x_1$$

■

La representación anterior emplea un sólo integrador, por lo tanto, se pierde información sobre la condición inicial de cada uno de los integradores del sistema. Esta representación solo es válida para efectos de simular el comportamiento del sistema si ambos integradores tienen la misma condición incial.

(c) (1.5 ptos) Matriz de transición de estado.

i. **Solución 1**: (Caso 2.b.i)

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

Luego

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}\begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

Como $s^2 - 2s + 1 = (s-1)(s-1)$, tiene dos raíces repetidas, la expansión en fracciones parciales resulta en:

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{(s-1)}$$

con

$$A = F(s)(s-1)^2|_{s=1} = -1$$

y

$$B = \frac{d}{ds}\left(F(s)(s-1)^2\right)\Big|_{s=1} = 1$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa

$$f(t) = -e^t t + e^t$$

y

$$\phi_{11}(t) = f(t) = -e^t t + e^t$$

Similarmente para el resto de términos:

$$\phi_{12}(t) = e^t t, \quad \phi_{21}(t) = -\phi_{12}(t) = -e^t t, \quad \phi_{22}(t) = s\phi_{12}(t) = e^t + e^t t$$

Por lo tanto,

$$\phi(t) = e^t \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}$$

■

ii. **Solución 2**: (Caso 2.b.ii)

$$\phi(t) = e^{At} = e^t$$

■

(d) (1.5 ptos) Respuesta del sistema.

$$y(t) = C\phi(t)x(0) + C\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

i. **Solución 1**: (Caso 2.b.i)

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) &= 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= 2e^t \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= 2e^t[x_2(0) - x_1(0)] \end{aligned}$$

y

$$y_{zs}(t) = 2\int_0^t e^{(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

Si ambas condiciones iniciales son iguales, es decir $x_1(0) = x_2(0)$,

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zs}(t) = 2\int_0^t e^{(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

Luego, si $u(t) = t$,

$$y(t) = 2e^t \int_0^t e^{-\tau}\tau d\tau = 2e^t \left[-e^{-\tau}\tau|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t e^{-\tau}d\tau\right] = 2e^t \left[-e^{-t}t - e^{-t} + 1\right] = 2(e^t - t - 1)$$

Si $u(t) = e^{-t}$,

$$y(t) = 2e^t \int_0^t e^{-\tau}e^{-\tau}d\tau = 2e^t \left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau}|_{\tau=0}^{\tau=t}\right] = 2\frac{e^t}{2}\left[1 - e^{-2t}\right] = e^t - e^{-t}$$

■

ii. **Solución 2**: (Caso 2.b.ii)

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\phi(t)x_1(0) + 2\int_0^t \phi(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= 2e^t x_1(0) + 2\int_0^t e^{(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

La integral contiene el mismo argumento que la integral de la solución anterior, luego la respuesta forzada o de estado cero $y_{zs}(t)$ es igual a la del sistema con condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$ independientes. En partícular, ambas soluciones $y(t)$, sin o con simplificación de los operadores de transferencia, son idénticas cuando las condiciones iniciales son cero. ■

3. (a) (1 pto) Sean y_1, y_2 las salidas de los bloque F_1 y F_2, respectivamente. A partir del diagrama es posible establecer que:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1 u \\ y_2 &= F_2\left(y_1 + u\right) \;=\; F_2\left(F_1 u + u\right) \;=\; F_2\left(F_1 + 1\right) u \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y &= y_1 + 2y_2 \\ &= F_1 u + 2F_2\left(F_1 + 1\right) u \\ &= \left(F_1 + 2F_2\left(F_1 + 1\right)\right) u \\ &= \left(F_1 + 2F_2 + 2F_1 F_2\right) u \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador de transferencia y/u estará dado por:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2} + \frac{4}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2(s+2) + 2(s+1) + 4}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{4s+10}{s^2+3s+2} \end{aligned}$$

■

(b) (1 pto) Sistema descrito mediante ecuaciones de estado.
A partir del operador de transferencia obtenido en el punto anterior, las ecuaciones en forma canónica observable estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^o \\ \dot{x}_2^o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

(c) (2 ptos) Ver figs. 6–7.

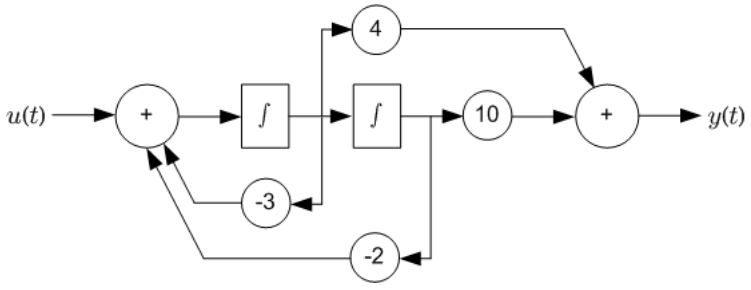


Figura 6: Diagrama en forma canónica controlable del sistema del problema 3.c.

(d) (1 pto) Como $A_c = A_o^T$, la matriz de transición de estado para el sistema en forma canónica observable estará dada por:

$$\phi_c(t) = e^{A_o^T t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A_o^T)^{-1}\right\}$$

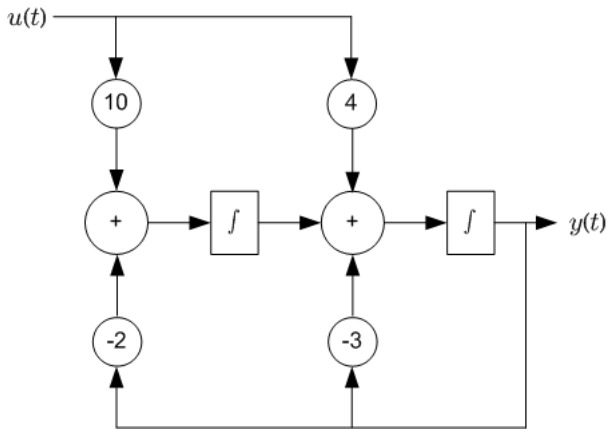


Figura 7: Diagrama en forma canónica observable del sistema del problema 3.c.

Luego

$$(sI - A_o^T)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

Como $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$, tiene dos raíces distintas, la expansión en fracciones parciales de

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

será

$$F(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

con

$$A = F(s)(s+1)|_{s=-1} = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1$$

y

$$B = F(s)(s+2)|_{s=1} = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=-2} = -1$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa a $F(s)$:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Luego, utilizando los operadores diferenciales de cada término de la matriz

$$\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

aplicados a $f(t)$, se tiene

$$\phi_{c11}(t) = (s+3)f(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{-t} - 3e^{-2t} = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

Similarmente para el resto de términos:

$$\phi_{c12}(t) = f(t), \quad \phi_{c21}(t) = -2f(t), \quad \phi_{c22}(t) = sf(t)$$

Por lo tanto,

$$\phi_c(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

■

(e) Respuesta a entrada $u(t) = 1 - e^{-t}$, $t \geq 0$, para condiciones iniciales nulas.

$$y(t) = y_{zs}(t) = C \int_0^t \phi_c(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$

Como la matriz de transición es para el sistema en las coordenadas de la forma canónica observable, se deben utilizar matrices C y B correspondientes a dicha forma. Específicamente $B_c = C_o^T$ y $C_c = B_o^T$. Luego,

$$\begin{aligned} C_c \phi_c(t) B_c &= \begin{bmatrix} 10 & 4 \end{bmatrix} \phi_c(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= 10e^{-t} - 10e^{-2t} + 8e^{-2t} - 4e^{-t} \\ &= 6e^{-t} - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

permite calcular la respuesta $y(t)$ como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t (6e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)}) u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (6e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)}) d\tau - \int_0^t (6e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)}) e^{-\tau} d\tau \\ &= 6e^{-t}(e^t - 1) - e^{-2t}(e^{2t} - 1) - 6e^{-t}t + 2e^{-2t}(e^t - 1) \\ &= 6 - 6e^{-t} - 1 + e^{-2t} - 6e^{-t}t + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ &= 5 - 4e^{-t} - e^{-2t} - 6e^{-t}t \end{aligned}$$

■

4. (a) (2 ptos) ¡El tren de pulsos con separación nula es una constante!

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega_0 nt}dt$$

con periodo $T = 1$, luego $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$, y

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi nt}dt = \frac{1}{-j2\pi n}e^{-j2\pi nt}\Big|_{t=-1/2}^{1/2} \\ c_n &= \frac{1}{-j2\pi n}\left(e^{-j\pi n} - e^{j\pi n}\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) \\ &= 0, \forall n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, n \neq 0. \end{aligned}$$

Si $n = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 1$$

¡Por lo tanto, la serie de Fourier de una constante es $\delta(n)$, simplemente un δ-Dirac discreto! El espectro bilateral de amplitud es trivial, tiene un impulso unitario en $n = 1$, y el de fase es cero para todo n.

(b) (2 ptos) Un tren de impulsos con periodo T

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{T}$$

El espectro de amplitud de un tren de impulsos es constante y de magnitud $\frac{1}{T}$, mientras que el espectro de fase es constante e igual a cero.

(c) (2 ptos) Recordando que,

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

y por lo tanto que

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a \pm b) + \cos(a \mp b)\right)$$

Luego

$$z(t) = \cos(t)\cos(100t) = \frac{1}{2}\left(\cos(101t) + \cos(99t)\right)$$

Sean $x_1(t) = \cos(99t)$ y $x_2(t) = \cos(101t)$, es fácil verificar (ejercicio de clases) que para una señal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $c_n^x = \frac{1}{2}$, para $n = \pm 1$, $c_n^x = 0$, $\forall n \neq \pm 1$. De la misma manera, es fácil verficar que para una señal $x(t) = \cos(k\omega_0 t)$, $k \in \mathbb{N}$, $c_n^x = \frac{1}{2}$, para $n = \pm k$, $c_n^x = 0$, $\forall n \neq \pm k$.
Si definimos como frecuencia fundamental $\omega_0 = 1$, entonces puede definirse

$$z(t) = \cos(k_1\omega_0 t)\cos(k_2\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(\cos((k_1 + k_2)t) + \cos((k_1 - k_2)t)\right)$$

con $k_1 = 100$, $k_2 = 1$, y por lo anterior, y linealidad ($c_n^z = c_n^{x_1} + c_n^{x_2}$, si $z = x_1 + x_2$):

$$c_n^z = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = \pm 99 \\ \frac{1}{4}, & n = \pm 101 \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 99, \pm 101 \end{cases}$$

Una manera astuta y rápida de obtener la solución es recordar la propiedad $c_n xy = c_n^x \star c_n^y$. Definiendo $w_0 = 1$, se tiene $x(t) = \cos(k_2 t)$ e $y(t) = \cos(k_1 t)$, con k_1 y k_2 definidos anteriormente. Ahora,

$$c_n^x = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = \pm 1 \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1 \end{cases}$$

y

$$c_n^y = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = \pm 100 \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 100 \end{cases}$$

Las gráficas de los espectros de c_n^x y c_n^y se muestran en la fig. 8, y su convolución $c_n^x \star c_n^y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n-k}^x c_k^y$ puede fácilmente verificarse en forma gráfica (ver figs. 9–10), confirmando que:

$$c_n^z = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = \pm 99 \\ \frac{1}{4}, & n = \pm 101 \\ 0, & \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 99, \pm 101 \end{cases}$$

■

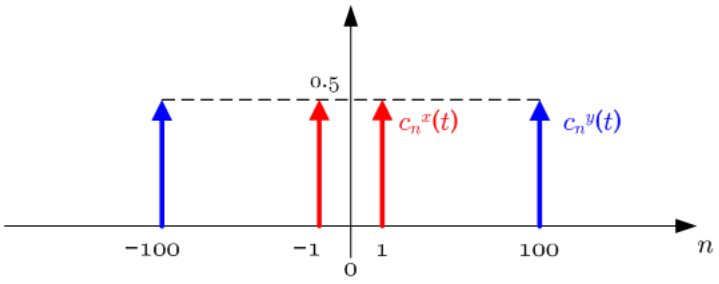


Figura 8: Espectros de amplitud de $x(t)$ e $y(t)$.

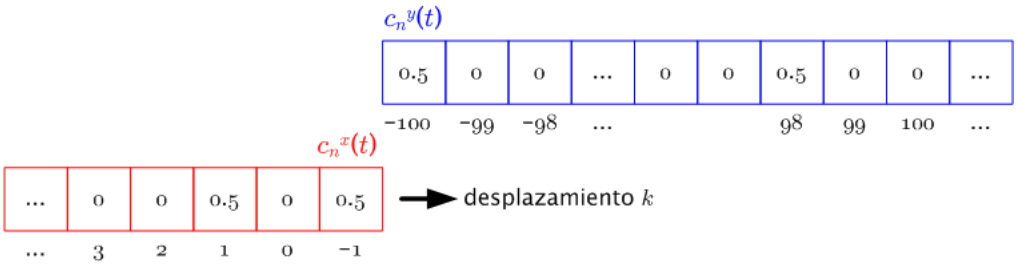


Figura 9: Convolución discreta en forma gráfica de c_n^x e c_n^y.

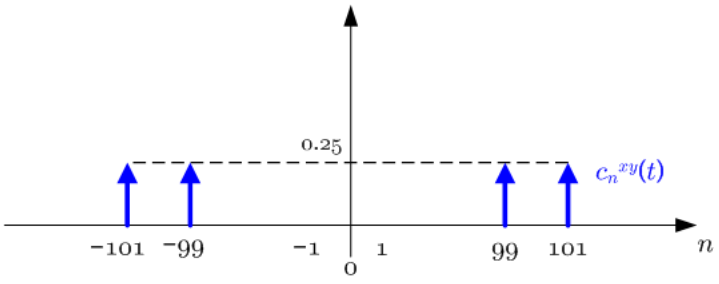


Figura 10: Convolución $c_n^x \star c_n^y = c_n^{xy}$.