Interrogación 3

◁ *Viernes 18 de junio, 2010 ⊗ 11:30-13:00* ▷

1. Para el sistema de la fig. 1, el cual representa un filtro recursivo de segundo orden:
   (a) Obtenga la ecuación de diferencia.
   (b) Obtenga el operador de transferencia del sistema.
   (c) Obtenga la representación en el estado en forma canónica controlable (CC).
   (d) Si $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = 0$ y $\beta = \frac{1}{2}$ calcule la matriz de transición de estado para el sistema en forma CC.
   (e) Obtenga la respuesta al escalón del sistema con condiciones iniciales nulas.
   (f) Obtenga la respuesta al impulso del sistema e indique si es de tipo FIR o IIR.

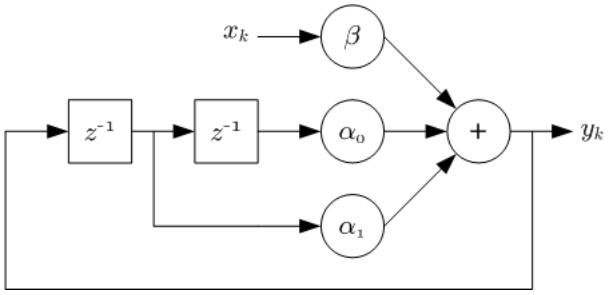


Figura 1: Sistema del problema 1.

2. Para el promediador móvil de la fig. 2:
   (a) Obtenga la ecuación de diferencia.
   (b) Obtenga expresiones para la solución homogénea y la solución particular si la entrada es una función rampa unitaria $x_k = k$, $k \geq 0$ (cero para $k < 0$), $k \in \mathbb{Z}$.
   (c) Obtenga la respuesta al impulso del sistema e indique si es de tipo FIR o IIR.
   (d) Determine si la salida es periódica cuando se aplican las siguientes señales e indique el periodo cuando lo sea.
      i. $x_k = \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)$.
      ii. $x_k = e^{j\frac{k}{\pi}}$.

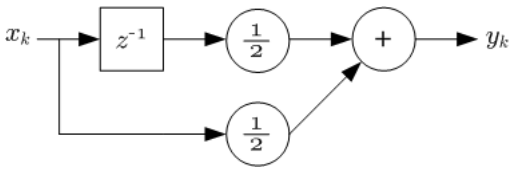


Figura 2: Sistema del problema 2.

3. En el llamado *muestreo instantáneo*, cada muestra corresponde a un pulso de ancho no nulo $\tau > 0$ y amplitud constante igual al valor de la muestra instantánea de la señal $x(t)$ durante el intervalo de duración del pulso, como se muestra en la fig. 3 (a). Suponiendo por conveniencia que la muestra instantánea se toma en el centro de cada pulso (este supuesto en general no es necesario):

   (a) Escriba una expresión para $x_s(t)$.

   (b) Calcule $X_s(\omega)$ suponiendo que $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = A \wedge (\omega/\omega_c)$ como se muestra en la fig. 3 (b).

   (c) Utilizando sólo un filtro pasabajo $H_{LP}(\omega)$, ¿se puede recuperar $x(t)$ sin distorsión?

   (d) Demuestre que es posible recuperar $x(t)$ sin distorsión si se añade un filtro ecualizador $H_{eq}(\omega)$ como se muestra en la fig. 3 (c), donde $H_{LP}(\omega) = p(\omega/(2\omega_c))$ es un pasabajo ideal y:

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega\tau/2)}{\sin(\omega\tau/2}, & |\omega| \leq \omega_c \\ \text{cualquier cosa}, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

   (e) ¿Para un ancho de pulso τ y un periodo de muestreo T dados, ¿cuál es la máxima frecuencia ω_c que puede contener $x(t)$ de modo que sea posible recuperar la señal sin distorsión?

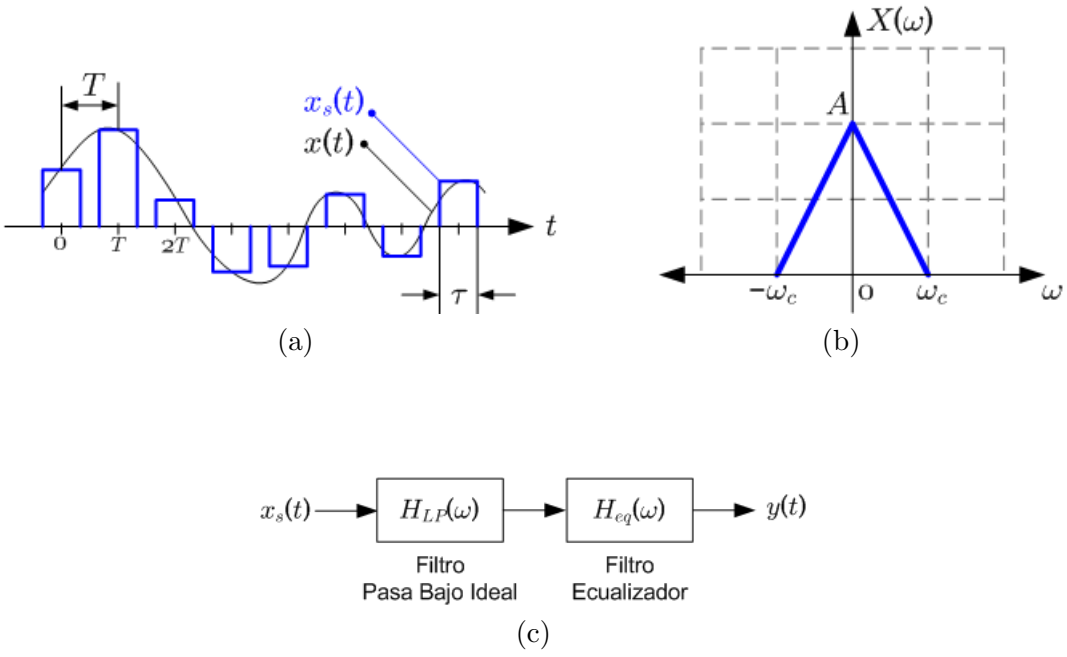


Figura 3: Representación del *muestreo instantáneo* (problema 3).

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

a) $y_k = \beta x_k + \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_0 y_{k-2}$

b) $(z^2 - \alpha_1 z - \alpha_0) y_k = \beta z^2 x_k$

$$\rightarrow \frac{y_k}{x_k} = F(z) = \frac{\beta z^2}{z^2 - \alpha_1 z - \alpha_0}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\beta\alpha_0 \quad \beta\alpha_1] \quad D = [\beta]$$

$\uparrow$ $\uparrow$

$b_0 - a_0 b_n$ $\quad b_1 - a_1 b_n$

d) $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$.

$$\rightarrow F(z) = \frac{\frac{1}{2} z^2}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\frac{1}{8} \quad 0] \quad D = \frac{1}{2}$$

$$A^k = \gamma_0(k)\, I + \gamma_1(k)\, A \quad (*) \quad \text{(por Cayley-Hamilton)}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow$ raices de $g(z) = 0$

$$z^2 - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow z = \pm \frac{1}{2}$$

deben satisfacer (*) $A \rightarrow \lambda$

$$\lambda_1^k = \gamma_0(k) + \gamma_1(k) \cdot \lambda_1$$
$$\lambda_2^k = \gamma_0(k) + \gamma_1(k)\, \lambda_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{bmatrix}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$\lambda_1 = -1/2$
$\lambda_2 = 1/2$ $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$\gamma_0(k) = (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \underbrace{\left[(-1)^k + 1\right]}_{\rho_0(k)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \left[-1 \cdot (-1)^k + 1\right] \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\gamma_1(k) = \underbrace{\left[1 + (-1)^{k+1}\right]}_{\rho_1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$\rho_1 = -1$

$$\therefore A^k = \begin{bmatrix} \rho_0(k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & 0 \\ 0 & \rho_0(k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_1 (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ \frac{1}{4}\left(\rho_1 (-1)^{k+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} \frac{p_0(k)}{2} & p_1(k) \\ \frac{p_1(k)}{4} & \frac{p_0(k)}{2} \end{bmatrix}$$

$$p_0(k) = 1 + (-1)^k$$

$$p_1(k) = 1 + (-1)^{k+1}$$

□

e) $$y(k) = CA^k x(0) + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B\, u(i) + D\, u(k)$$

$x(0) = 0$

$u(i) = 1 \quad \forall\, i \geq 0.$

$$\Rightarrow \quad y(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{CA^{k-1-i} B}_{\begin{bmatrix} 1/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + D, \quad k \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{p_1(k)}{2} \\ \frac{p_0(k)}{2} \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{k-1} p_1(k-1-i) + D$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[p_1(k-1) + p_1(k-2) + \cdots + p_1(0) \right] + D$$

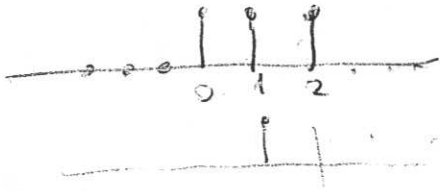
$k=4$, $k=3$: $2, \ldots, 0$; $1/4$, $1/2$.

$$= \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{k-1} p_1(j) + D = \begin{cases} \frac{1}{8}(k-1) + D \end{cases}$$

//.

f) $y(k) = h(k) * \delta(k)$

$\delta(k) = u(k) - u(k-1)$



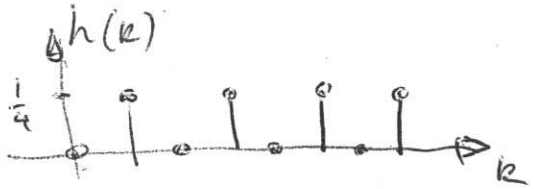
$y(k) = \underbrace{h(k) * u(k)}_{y_s(k)} - \underbrace{h(k) * u(k-1)}_{y_s(k-1)}$

$$y(k) = \left[\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-1} p_1(j) + D\right] - \left[\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-2} p_1(j) + D\right]$$

$$y(k) = \frac{1}{3} p_1(k-1) = \frac{1}{3}\left(1 + (-1)^{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\{0, 2, 0, 2, 0, \ldots\}$$

$$y_h = c\left(\frac{1}{2}\right)^k + c\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$



NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

a) $$y_k = \frac{1}{2}x_{k-1} + \frac{1}{2}x_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \quad (1)$$

b) $$F(z) = \frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}{z}$$

Homogénea

$y_k = 0$

ec. caract. $q(z) = 0 \longrightarrow z = 0$

$y_h(k) = C(0)^k = 0$ □

Particular

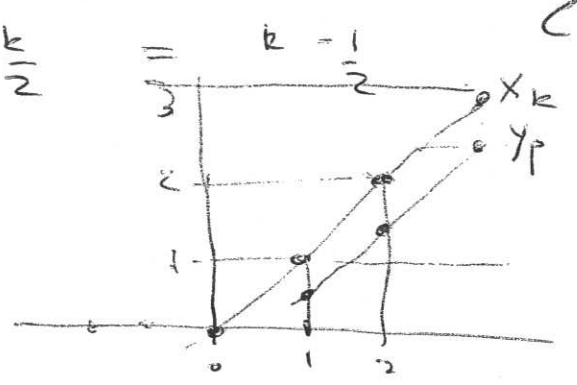
$y_p(k) = Ck + C_0$ debe satisfacer (1)

$$Ck + C_0 = \frac{(k-1)}{2} + \frac{k}{2}$$

$$Ck + C_0 = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + \frac{k}{2}$$

$$C_0 = -\frac{1}{2}$$

$C = 1$

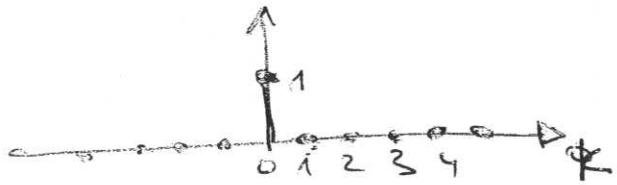


k	x_k	y_k
-1	0	0
0	0	0
1	1	1/2
2	2	3/2
3	3	5/2
4	4	7/2

$$y_p(k) = k - \frac{1}{2}, \quad k \geq 1$$ □

c) $y_k = \frac{1}{2} x_{k-1} + \frac{1}{2} x_k$

$x_k = \delta_k$



$$y_0 = \frac{1}{2} x_{-1} + \frac{1}{2} x_0 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = 0$$

$$z^n y_k = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^i x_k$$

$$y_{k+n} = \alpha_0 x_k + \alpha_1 x_{k+1} + \dots \alpha_n x_{k+n}$$

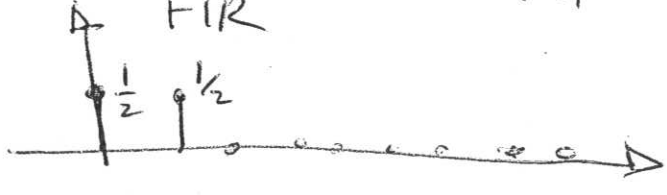
$$= \{ \alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \dots \alpha_0, 0, 0 \dots \}$$

$x_k = \delta_k$

$y_{k+n} = \alpha_0 \delta_k + \alpha_1 \delta_{k+1} + \alpha_2 \delta_{k+2} + \dots \alpha_n \delta_k$

$y_k = \alpha_0 \delta_{k-n} + \alpha_1 \delta_{k+1-n} + \dots + \alpha_n \delta_k$

$n-1$



$$\boxed{y_k = \frac{1}{2} \delta_{k-1} + \frac{1}{2} \delta_k}$$

□

d) $y_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\Omega_0} k\right) + \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\Omega_1}(k-1)\right)\right)$

$\cos(\omega t)$ ← kT_s

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right.$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right.$

$\therefore \boxed{\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}}$ ← periodo

$\omega T_s \cdot k$ ($\omega T_s = \Omega_0$)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{\Omega_0 T_s}{2\pi} = \frac{m}{N} = \frac{\frac{2\pi}{T} T_s}{2\pi} = \frac{m}{N} \rightarrow \frac{T_s}{T} = \frac{m}{N}$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{3} = \frac{m}{N_0}$



$\rightarrow \underline{N_0 = 3m}$ m entero más pequeño es $m=1$.

Lo mismo $\Omega_1 \rightarrow N_1 = 3$

La suma es periodica

si existen p, q, t.q $pN_0 = qN_1$ con p, q en

$\rightarrow p = q = 1$ ✓ ∴ result

d. ii)

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{\pi}\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{k}{\pi}\right)$$

$$y_k = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{k}{\pi}\right) + \cos\left(\frac{k-1}{\pi}\right)\right) + \frac{j}{2}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{k}{\pi}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{k-1}{\pi}\right)\right)$$

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1/\pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2} \neq \frac{m}{N}$$

$\therefore \Rightarrow \cos\left(\frac{k}{\pi}\right)$ no es periódica

$\therefore$ es imposible que y_k sea periódica.

□

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

$$y_s(t) = p\left(\frac{t}{\tau}\right) * \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]$$

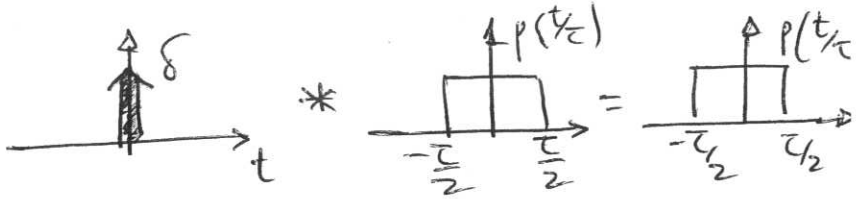
$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}\{y_s\} = Y_s(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \cdot \left[\Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) * \sum_{n=-\infty} \delta(\omega - \right.$$

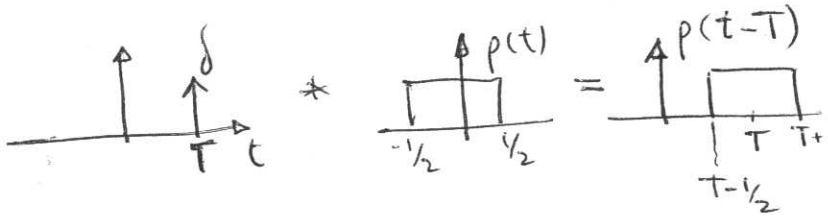
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Demostración

a) $\delta * p\left(\frac{t}{\tau}\right) = p\left(\frac{t}{\tau}\right)$



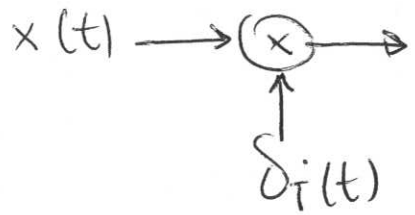
$p * \delta(t-T) = p(t-T)$



por lo anterior:

$$p(t) * \delta_T(t) = p(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT) \qquad (1)$$

En el <u>muestreo ideal</u>



$$y(t) = x(t)\cdot\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT) \qquad (2)$$

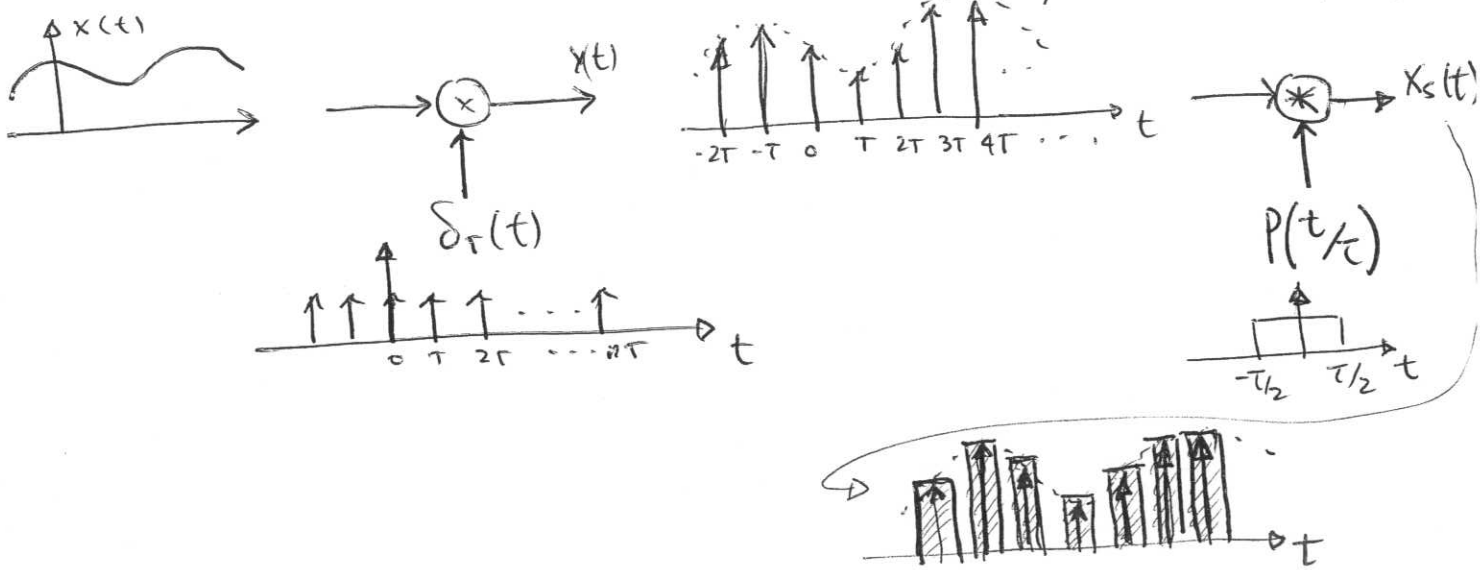
El <u>muestreo instantaneo</u> se obtiene aprovechando (1) y (2):

$$x_s(t) = p(t) * y(t) = p(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,p(t-nT$$

$$= \ldots + p(t)\cdot x(0) * \delta(t) + p(t)\cdot x(T) * \delta(t-T) + p(t)\,x(2T) * \delta(t-2T) + \ldots$$

$$\therefore \boxed{x_s(t) = p\left(\tfrac{t}{\tau}\right) * \left[x(t)\cdot\delta_T(t)\right]} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,p\left(\tfrac{t-nT}{\tau}\right.}$$

(A) (B)



b) Calcular $\bar{X}_s(\omega)$ es muy sencillo a partir de (A), bastante más complejo a partir de (B).

i) Usando (A)

$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\left\{ p\left(\frac{t}{\tau}\right) * [x(t)\cdot \delta_T(t)] \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{p\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} \mathcal{F}\{x(t)\cdot\delta_T(t)\}$$

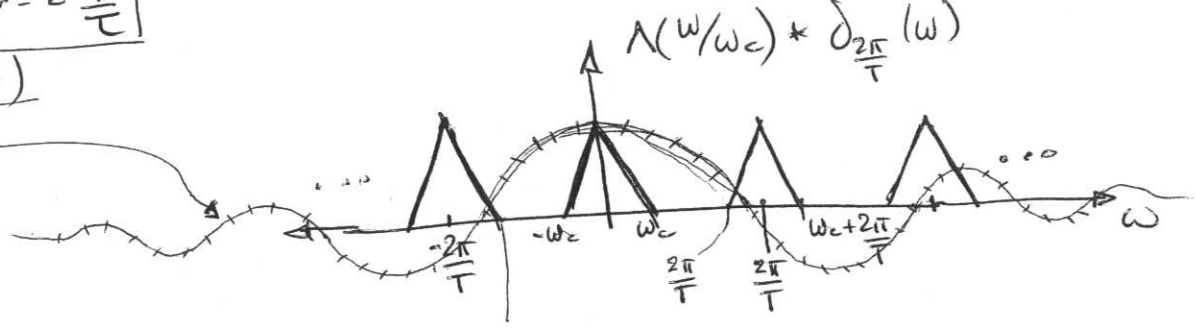
$$= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cdot\left[\mathcal{F}\{x(t)\}(\omega) * \mathcal{F}\{\delta_T(t)\}(\omega)\right]$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left[\Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) * \frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)\right] = \frac{2\pi}{T}\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda\left(\frac{\omega-}{c}\right.$$

$$\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$\frac{\omega\tau}{2} = k\pi$

cruces por cero de $\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ $\boxed{\omega = k\frac{2\pi}{\tau}}$



ii) Usando (B)

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, p\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \mathcal{F}\left\{p\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)\right\}$$

Usando las propiedades

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{p\left(\frac{t}{\tau}-\frac{nT}{\tau}\right)\right\} = e^{-j(\omega\cdot\tau)\cdot\frac{nT}{\tau}} \cdot \tau F(\omega\tau)$$

$$= \tau \cdot e^{-j\omega nT} \cdot \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\therefore \mathcal{F}\{x_s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\tau\cdot e^{-j\omega nT}\cdot\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau\cdot x(nT)\cdot e^{-j\omega\cdot n\cdot T}}$$

$$= \mathcal{F}\{x(t)\cdot\delta_T(t)\}$$

$$= \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) * \frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

$$= \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\cdot\left[\Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) * \delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)\right]$$

□

c). Si $H_{LP}(\omega) = \phi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$

$X_s(\omega) \rightarrow \boxed{H_{LP}(\omega)} \rightarrow Y_f(\omega) = H_{LP}(\omega) \cdot X_s(\omega)$

$$= \underbrace{\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}_{C(\omega)} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$= C(\omega) \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

∴ NO es posible recuperar $\Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$ porque el coeficiente C no es constante (depende de la frecuencia).

d) Si $H_{eq}(\omega) = \frac{\omega\tau}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$ $\quad |\omega| \leq \omega_c$

entonces

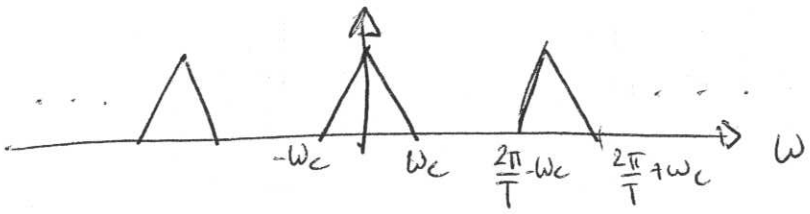
$$Y_f(\omega) = H_{eq}(\omega) \cdot X_s(\omega) = \frac{\omega\tau}{2} \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \Lambda$$

$$= \frac{2\pi \cdot \tau}{T} \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

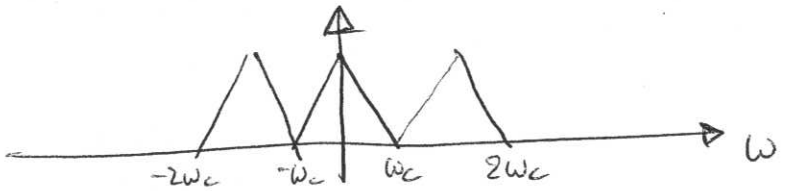
(constante solo depende de τ y T)

∴ Es posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de la señal muestreada "$x_s(t)$", con un factor de atenuación/amplificación $\frac{2\pi\tau}{T}$.

e) Frecuencialmente se requiere que no haya traslape



← sin traslape



← caso límite antes que ocurra el traslape



La condición de "no-traslape" es:

$$\frac{2\pi}{T} - \omega_c \geq \omega_c \rightarrow 2\omega_c \leq \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T \leq \frac{\pi}{\omega_c}}$$

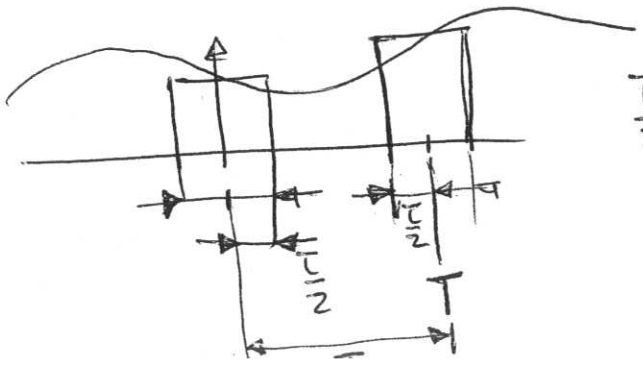
$$\omega_c = 2\pi f_{max}$$

$$\Longleftrightarrow T \leq \frac{1}{2 f_{max}}$$

$$\boxed{f_s = \frac{1}{T} \geq 2 f_{max}}$$

Nyquist!

Temporalmente



$$\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} \leq T \rightarrow \boxed{\tau \leq T}$$

∴ Dado **T**, forzosamente $\tau \leq T$

y $f_{max} \leq \frac{f_s}{2} \equiv \frac{1}{2T}$