Prueba 5 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [4 ptos] Se define la transformada Z unilateral como

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

Demuestre los teoremas del valor inicial y del valor final

$$f[0] = \lim_{z\to\infty} F(z) \quad y \quad \lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$$

Resultado:

$$\begin{aligned} f[0] &= \lim_{z\to\infty} F(z) \\ &= \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} \\ &= \lim_{z\to\infty} (f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \cdots) \\ &= f[0] \end{aligned}$$

El teorema del valor final

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} f[N] &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z) \\ &= \lim_{z\to 1} \mathcal{Z} f[n] - \mathcal{Z} f[n-1] \\ &= \lim_{N\to\infty} (f[n] - f[n-1])_{\text{hasta } N} \\ &= \lim_{N\to\infty} (f[0] + f[1] + \cdots + f[N] - f[0] - f[1] - \cdots - f[N-1]) \\ &= \lim_{N\to\infty} f[N] \end{aligned}$$

2. [4 ptos] Sea $f[n]$ una señal discreta con $f[n] = 0$ para $n < 0$. Se sabe que cumple con la siguiente ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} f[n-k] = 2^{-n} \quad \text{para } n \geq 0$$

Encuentre $f[n]$.

Resultado: Lo primero es reconocer que el lado izquierdo es una convolución, ya que es lo mismo que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]f[n-k] = g[n] * f[n] = h[n]$$

con

$$g[n] = (\frac{1}{3})^n \sqcap[n] \quad \text{y} \quad h[n] = (\frac{1}{2})^n \sqcap[n]$$

Aplicando transformada Z tenemos

$$G(z)F(z) = H(z)$$

es decir

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

de donde

$$F(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{3}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Cuya inversa es

$$f[n] \quad = \quad (\frac{1}{2})^n \sqcap[n] - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1} \sqcap[n-1]$$

3. [4 ptos] Se tiene la siguiente ecuación de diferencias que desccribe un sistema causal, lineal e invariante, de salida $g[n]$ y entrada $f[n]$

$$g[n] - g[n-1] + \frac{1}{4}g[n-2] = 2f[n] - 2f[n-1] - af[n-2] - bf[n-3]$$

donde a y b son constantes reales. Encuentre la respuesta al impulso del sistema y diga si el sistema es estable.

Resultado: La transformada Z de esta ecuación es

$$G(z) - z^{-1}G(z) + \frac{1}{4}z^{-2}G(z) = 2F(z) - 2z^{-1}F(z) - az^{-2}F(z) - bz^{-3}F(z)$$

La función de transfarencia será

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{2 - 2z^{-1} - az^{-2} - bz^{-3}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{2 - 2z^{-1} - az^{-2} - bz^{-3}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

Sabemos que

$$p[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

Escribimos la función de transferencia como

$$H(z) = 4z\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} - 4\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} - 2az^{-1}\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} - 2bz^{-2}\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

Cuya inversa será

$$\begin{aligned} h[n] &= 4p[n+1] - 4p[n] - 2ap[n-1] - 2bp[n-2] \\ &= 4(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sqcap[n+1] - 4n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sqcap[n] \\ &\quad -2a(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sqcap[n-1] - 2b(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \sqcap[n-2] \end{aligned}$$

Finalmente, el sistema es estable porque tiene dos polos en $z = 1/2$ y como es causal, la región de convergencia es hacia el exterior. Es decir incluye al círculo unitario.

4. [4 ptos] Encuentre el valor inicial y final de $f[n]$ si su transformada Z unilateral es

$$F_1(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})}$$

Resultado: Este problema se resuelve fácilmente de aplicar los teoremas de la primera pregunta.

El valor inicial será

$$f[0] = \lim_{z\to\infty} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})} = 0$$

El valor final será

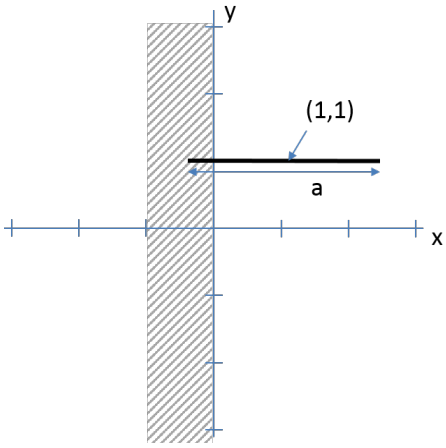
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f[n] &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2})} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z^{-1}}{1+1.3z^{-1}+0.4z^{-2}} \\ &= \frac{1}{1+1.3+0.4} = \frac{1}{2.7} \end{aligned}$$

5. [4 ptos] Se tiene la siguiente convolución bidimensional

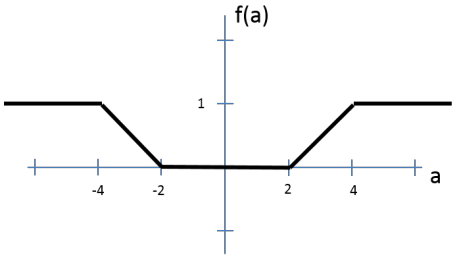
$$f(x,y) = \sqcap(x+1/2) * \sqcap(x/a)\delta(y)$$

Grafique $f(1,1)$ en función de a.

Resultado: La primera función es un "listón" en el sentido y, de ancho 1 y de altura 1, centrado en $x = -1/2$ (ver figura). La segunda función es un rect horizontal de ancho a. Ya que necesitamos la convolución en $(1,1)$, en la figura está centrada en ese punto.



Ahora, es cuestión de multiplicar ambas funciones e integrarlas para diferentes valores de a. Si $|a| < 2$ no habrá intersección por lo que la convolución será cero. Por otro lado, si $|a| > 4$ la intersección será toda la sección de $\sqcap(x + 1/2)$, es decir la convolución será 1. Para valores intermedios, la convlución variará linealmente entre 0 y 1, tal como se grafica a continuación:



6. [4 ptos] Interesa expresar una transformada de Fourier discreta de dos dimensiones como un producto matricial, es decir, si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

encuentre W de manera que

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Resultado: Este problema se puede resolver directamente de evaluar la definición de la 2D-DFT para cada $F[k, l]$. Pero también se puede hacer notando que la 2D-DFT se puede descomponer en aplicar la 1D-DFT a cada columna, y luego a cada fila. Es decir, aplicando en las columnas primeros se tiene

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ a - c & b - d \end{bmatrix}$$

Y luego en las filas

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A'+B' & A'-B' \\ C'+D' & C'-D' \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} a+c+b+d & a+c-b-d \\ a-c+b-d & a-c-b+d \end{bmatrix}$$

Que escrito en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$