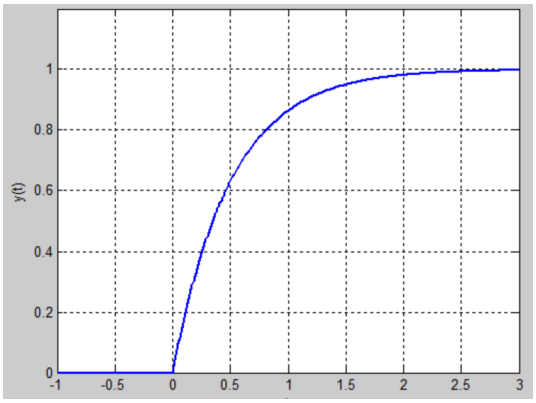
Prueba 1 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Se tiene un sistema lineal e invariante cuya salida es la indicada en el gráfico cuando la entrada es $x(t) = 2\sqcap(t)$. Encuentre una ecuación diferencial que describa al sistema.



Resultado: Por inspección simple, se puede ver que el sistema es de primer orden de ecuación diferencial

$$y'(t) + ay(t) = x(t)$$

cuya solución es

$$y(t) = e^{-at}\left\{\int x(t)e^{at}\,dt + C\right\}$$

Si $x(t) = 2\sqcap(t)$, entonces

$$y(t) = \frac{2}{a}(1 - e^{-at})\sqcap(t)$$

De donde $a = 2$ de manera que si $t \to \infty$, $y(t) \to 1$. Por lo que la ecuación diferencial es

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

2. [6 ptos] Los sistemas A y B están descritos por sus respuestas al impulso $h_A(x)$ y $h_B(x)$. Si la entrada a ambos sistemas es $f(x) = \cos(\omega x)$ se tiene que la salida del sistema A es cero para $\omega = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$) y la del sistema B es cero para $\omega = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$).

   (a) Encuentre $h_A(x)$ y $h_B(x)$ que cumplan con la condición.

   (b) Encuentre $h_A(x) * h_B(x)$.

Resultado:

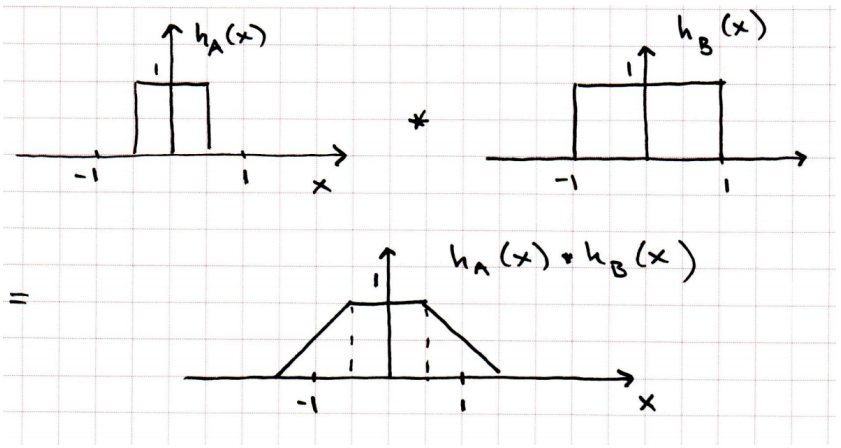
(a) Como $\cos(2\pi kx)$ es periódica de periodo $1/k$, y la integral de cada periodo es 0, cualquier sistema que integre en uno o más periodos resultará en cero. La versión más simple será que integre en un periodo para la frecuencia más baja, es decir para $k = 1$:

$$h_A(x) = \sqcap(x)$$

Análogamente, para $\cos(\pi kx)$ el periodo es $2/k$, por lo que

$$h_B(x) = \sqcap(x/2)$$

(b) Gráficamente



3. [6 ptos] Encuentre la parte par e impar de $f(x) = \text{sgn}(x)\ln(x)$.

Resultado: Este problema es mecánico, sólo hay que tener cuidado de interpretar correctamente el signo de x. Veamos la parte par primero. Por definición

$$\begin{aligned} 2P(x) &= f(x) + f(-x) \\ &= \text{sgn}(x)\ln(x) + \text{sgn}(-x)\ln(-x) \end{aligned}$$

Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} 2P(x) &= \text{sgn}(x)\ln(x) + \text{sgn}(-x)\ln(-x) \\ &= \ln(x) - (\ln(x) + i\pi) \\ &= -i\pi \end{aligned}$$

Como esta la parte par, para$x$ negativos deberíamos tener el mismo resultado: Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} 2P(x) &= \text{sgn}(x)\ln(x) + \text{sgn}(-x)\ln(-x) \\ &= -(\ln(-x) + i\pi) + \ln(-x) \\ &= -i\pi \end{aligned}$$

La parte impar, por definición es

$$\begin{aligned} 2I(x) &= f(x) - f(-x) \\ &= \text{sgn}(x)\ln(x) - \text{sgn}(-x)\ln(-x) \end{aligned}$$

Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} 2I(x) &= \text{sgn}(x)\ln(x) - \text{sgn}(-x)\ln(-x) \\ &= \ln(x) + \ln(-x) \\ &= \ln(x) + (\ln(x) + i\pi) \\ &= 2\ln(x) + i\pi \end{aligned}$$

Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} 2I(x) &= \text{sgn}(x)\ln(x) - \text{sgn}(-x)\ln(-x) \\ &= -\ln(x) - \ln(-x) \\ &= -(\ln(-x) + i\pi) - \ln(-x) \\ &= -2\ln(-x) - i\pi \\ &= -2\ln(|x|) - i\pi \end{aligned}$$

En resumen

$$P(x) = -\frac{1}{2}i\pi$$

e

$$I(x) = \text{sgn}(x)\left[2\ln(|x|) + i\pi\right]$$

4. [6 ptos] Un sistema de entrada $f(x)$ y salida $g(x)$ está descrito por

$$g(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

   (a) Encuentre la respuesta al impulso, $h(x, \xi)$.

   (b) Exprese la salida $g(x)$ de este sistema a la entrada $f(x)$ en función del $h(x, \xi)$ recién encontrado.

   (c) Encuentre la salida si la entrada es $f(x) = \sqcap(x/2)$.

Resultado: Dado que el límite inferior de la integral es 0 en vez de ∞, el sistema no es invariante.

   (a) La respuesta al impulso, $h(x, \xi)$, será (cambié la variable de integración para que no haya confusión):

$$h(x, \xi) = \int_0^x f(\eta)\, d\eta \quad \text{con} \quad f(\eta) = \delta(\eta - \xi)$$

$$h(x,\xi) = \int_0^x \delta(\eta - \xi)\, d\eta$$

Como $\delta(x)$ es la derivada de $\sqcap(x)$ la integral será

$$h(x,\xi) = \int_0^x \delta(\eta - \xi)\, d\eta = \sqcap(y)\,|_{-\xi}^{x-\xi} = \sqcap(x-\xi) - \sqcap(-\xi)$$

Es decir,

$$h(x,\xi) = \sqcap(x-\xi) - \sqcap(-\xi)$$

(b) La salida será la integral de superposición con la respuesta al impulso, es decir,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) h(x,\xi)\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\sqcap(x-\xi) - \sqcap(-\xi)]\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sqcap(x-\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sqcap(-\xi)\, d\xi \\ &= \int_{x}^{\infty} f(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{0} f(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

(c) Evaluando la salida recién encontrada en $f(x) = \sqcap(x/2)$, tenemos

$$g(x) = \int_x^{\infty} \sqcap(\xi/2)\, d\xi - \int_{-\infty}^{0} \sqcap(\xi/2)\, d\xi$$

La primera integral vale 2 para $x < -1$, vale $1 - x$ para $-1 < x < 1$ y vale 0 para $x > 1$. La segunda integral vale 1. Lo que se puede escribir como

$$g(x) = -\mathrm{sgn}(x)(1 - \wedge(x))$$

5. [6 ptos] Se tiene la variable aleatoria X que distribuye normal de media $m > 0$ y desviación estándar σ. Se define el valor esperado de una función $g(x)$ como

$$\mathrm{E}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidades de X. Encuentre el valor esperado para $g(x) = \ln(x)$ si $\sigma \to 0$.

Resultado: Si $\sigma \to 0$ entonces $f_X(x) \to \delta(x - m)$, con lo que el valor esperado es

$$\mathrm{E}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x-m)\, dx = g(m) = \ln(m)$$