Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 8

21 de Octubre 2022

---

1. Se define el problema de valores propios como:

$$\mathcal{L}\{f[n]\} = \lambda f[n]$$

Donde $\mathcal{L}$ es cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo.

Demuestre que $f[n] = Ae^{pTn}$ con A, $p \in \mathbb{C}$ es una señal propia y determine su correspondiente valor propio.

Para todo sistema LTI, la salida corresponde a la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

Luego, la salida de un sistema LTI si lo que entra es $x[n] = Ae^{pTn}$ es:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]Ae^{pT(n-m)}$$

Usando propiedades de las potencias:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]Ae^{-pTm}e^{pTn}$$

Al no depender de m, podemos sacar de la suma Ae^{pTn}, luego:

$$y[n] = Ae^{pTn} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-pTm}$$

Dado $x[n] = Ae^{pTn}$ sustituyo:

$$y[n] = x[n] \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-pTm}$$

A continuación notamos que la suma se puede interpretar como la DTFT de $h[m]$ evaluada en $u = \frac{p}{i2\pi}$. Notemos que $H\left(u = \frac{p}{i2\pi}\right)$ es un número, porque estamos evaluando la función en una constante, luego tendremos:

$$y[n] = x[n]H\left(u = \frac{p}{i2\pi}\right)$$

Por lo tanto, podemos decir que $x[n] = Ae^{pTn}$ es autofunción de todo sistema LTI porque la salida del sistema será la función multiplicada por una constante. El valor de dicha constante es el autovalor asociado a $x[n] = Ae^{pTn}$ y depende de la respuesta de frecuencia del sistema, está dado por $H\left(u = \frac{p}{i2\pi}\right)$

2. Encuentre la DFFT de una señal periódica rectangular de período T, que vale 1 entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y vale 1 entre 3T/4 y T.

- Para realizar este ejercicio, analizamos que es un tren de pulsos de un rect de ancho 4. Al ser un rect tenemos la *intuición* de que en Fourier debería ser un sinc (o similar). Resolvemos aplicando la definición de DFFT:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i2\pi k\frac{x}{T}} f(x)dx$$

- Dado que $f(x) = 1$ entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y 1 entre 3T/4 y T podemos dividir esto en 3 integrales:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/4} e^{-i2\pi k\frac{x}{T}} \cdot 1dx + \int_{T/4}^{3T/4} e^{-i2\pi k\frac{x}{T}} \cdot 0dx + \int_{3T/4}^{T} e^{-i2\pi k\frac{x}{T}} \cdot 1dx\right]$$

  - Luego, resolviendo llegamos a:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{-i2\pi k}\left[e^{-i2\pi\frac{k}{4}} - 1 + e^{-i2\pi k} - e^{-i2\pi\frac{3k}{4}}\right]$$

  - Resolviendo y reemplazando las exponenciales por su fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[\cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right) - i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) - 1 + \cos(2\pi k) - i\sin(2\pi k) - \cos\left(2\pi\frac{3k}{4}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)\right]$$

- Por simetría en el círculo unitario $\cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right) = \cos\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)$ (ver video ayudantía para aclarar).

Si k es un entero (válido en el mundo discreto): $\cos(2\pi k) = 1$ y $\sin(2\pi k) = 0$. Luego, considerando los dos puntos anteriores, la expresión de $\tilde{F}[k]$ se reduce a:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[-i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)\right]$$

- Dado k entero y usando simetrías tendremos que: $\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) = -\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)$, por lo que:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[-2i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right)\right]$$

- Simplificando:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

- Haciendo un cambio de variable (sugiero usar v=k/2), tendremos finalmente:

$$\boxed{\tilde{F}[k] = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\tfrac{k}{2}\right)}$$