Interrogación 6

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.
- En esta interrogación hay 3 preguntas, todas obligatorias.

---

1. (4 pts). Sea un sistema cuya salida es $y[n] = \begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ a la entrada $x[n] = \sqcap[n]$, ¿Cuál es la respuesta al impulso?

   Solución:

   Recordemos que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, si aplicamos transformada Z a las señales provistas se tiene que

   $$Y(z) = 1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + 5z^{-3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   y

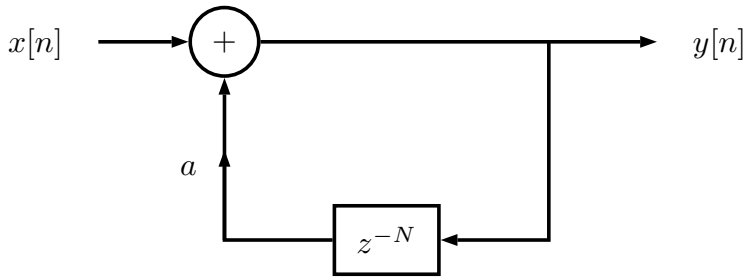
   $$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   Por lo tanto

   $$\begin{aligned} H(z) &= \left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + 5z^{-3}\right) \\ &= 1 + 2z^{-1} - 5z^{-2} + 7z^{-3} - 5z^{-4}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

   Obteniendo la respuesta al impulso $h[n] = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -5 & 7 & -5 \end{pmatrix}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$

2. (9 pts). Considere el siguiente sistema discreto, que simula un reverberador simple, muy utilizado en aplicaciones de audio:



(a) (2 puntos) Determine la función de transferencia del sistema $H(z)$.

(b) (2 puntos) Determine la respuesta al impulso a partir de $H(z)$.

(c) (1 punto) Plantee condiciones sobre a para que el sistema sea estable.

(d) (4 puntos) Asumiendo $N = 8$ dibuje el diagrama de polos y ceros y muestre la respuesta en magnitud.

Solución:

(a) El diagrama de bloques indica que

$$y[n] = x[n] + ay[n-N]. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Por lo que usando la transformada Z se obtiene que

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-N}}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) La respuesta al impulso por propiedad de estiramiento será

$$h[n] = \begin{cases} a^k & \text{, si } n = kN \text{ y } n \geq 0 \\ 0 & \text{, si no} \end{cases} . \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) Este sistema será estable para $|a| < 1$. $\rightarrow$ **1 pts.**

(d) Primero tendremos que determinar los polos y los ceros del sistema por lo que reescribiremos su función de transferencia como

$$H(z) = \frac{z^N}{z^N - a},$$

así obteniendo que los ceros son $z_z = 0$ con multiplicidad N y los polos son $z_p = ae^{i2\pi k/N}, k = 0, \ldots, N-1$. $\rightarrow$ **2 pts.**

Por lo que el diagrama de polos y ceros es $\rightarrow$ **1 pts.** y la respuesta en magnitud $\rightarrow$ **1 pts.**

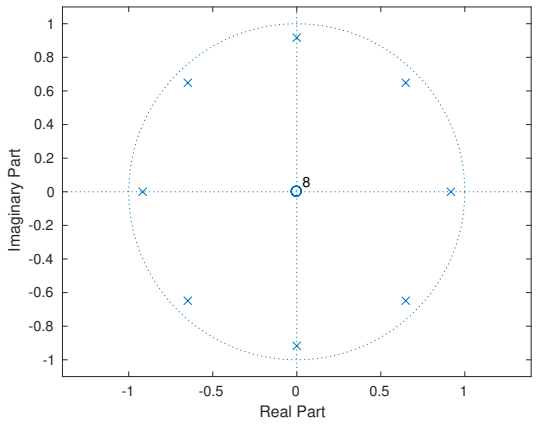


Figure 1: Diagrama de polos y ceros.

3. (6 pts). Se define el problema de valores propios (autovalores) como

$$\mathcal{L}\{f[n]\} = \lambda f[n]$$

para $\mathcal{L}$ cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo. Demuestre que $f[n] = Ae^{pTn}$ con A, $p \in \mathbb{C}$ es una señal propia (autofunción) y determine su correspondiente valor propio.

Solución:

La salida de un sistema LTI discreto puede expresarse como

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} h[m]\, Ae^{pT(n-m)} = Ae^{pTn} \sum_{m\in\mathbb{Z}} h[m]\, Ae^{-pTm}. \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Recordando que $z = e^{sT}$ tendremos que

$$\mathcal{L}\{f[n]\} = H(z = e^{p})\, f[n], \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

demostrando así que $f[n]$ es una señal propia con valor propio $\lambda = H(z = e^{p}) . \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$

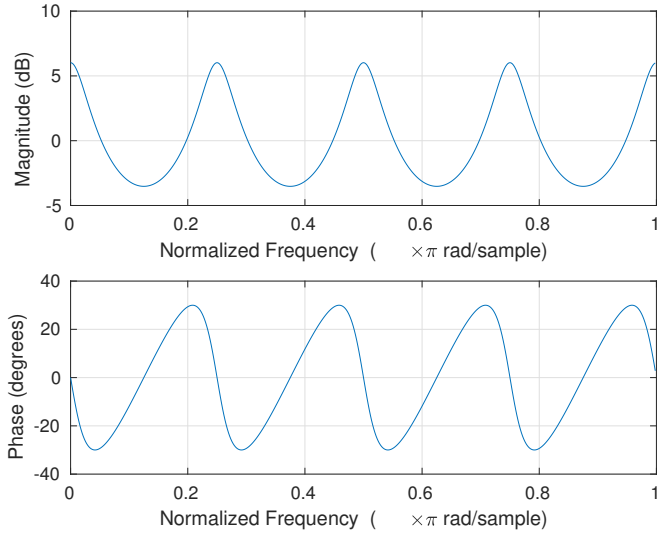


Figure 2: Respuesta en magnitud (se incluye la en fase también, pero no es parte de la pregunta).