IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 2

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2022
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 60
Fecha: 27/05/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Respuesta al escalón**. Considere un sistema LTI discreto cuya respuesta al escalón es

$$s[n] = \sqcap_5[n]$$

donde $\sqcap_5[n]$ es la secuencia rectangular de largo 5 vista en clases.

(a) (2 pts.) Determine la respuesta al impulso del sistema.

(b) (1 pto.) Determine la ecuación de diferencias del sistema.

(c) (1 pto.) Dibuje un diagrama de bloques del sistema.

(d) (4 pts.) Determine la respuesta de frecuencia del sistema y bosqueje su magnitud.

(e) (1 pto.) Determine la estabilidad del sistema.

(f) (2 pts.) Asuma un período de muestreo $T = 1$ y calcule la salida a la entrada $f[n] = \cos(6\pi\frac{n}{5}) + 0.5\cos(\pi n)$

(g) (1 pto.) Este tipo de sistemas se conocen como filtros comb (peine o peineta), proponga alguna justificación para este nombre.

Solución

(a) Sabemos que el impulso se relaciona con el escalón mediante la ecuación

$$\delta[n] = \sqcap[n] - \sqcap[n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Como el sistema es lineal e invariante, entonces

$$h[n] = \mathcal{L}\{\delta[n]\} = \mathcal{L}\{\sqcap[n]\} - \mathcal{L}\{\sqcap[n-1]\} = \sqcap_5[n] - \sqcap_5[n-1]$$

es decir

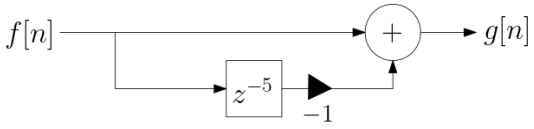
$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-5] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

(b) Como la respuesta al impulso es finita, es claro que el sistema solo involucra retrasos de la entrada y los coeficientes de la respuesta al impulso son los coeficientes de la ecuación de diferencias → **1 pt.** , es decir

$$g[n] = f[n] - f[n-5] \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(c) El diagrama de bloques es el siguiente



→ **1 pt.**

(d) La respuesta de frecuencia se puede encontrar tomando la DTFT

$$\tilde{H}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta[n] - \delta[n-5]) e^{-i2\pi unT} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Utilizando la propiedad del cedazo del impulso,

$$\tilde{H}(u) = e^{-i2\pi unT}|_{n=0} - e^{-i2\pi unT}|_{n=5} = 1 - e^{-i10\pi uT} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Para calcular la magnitud, necesitamos separar las partes real e imaginaria de la respuesta de frecuencia, es decir

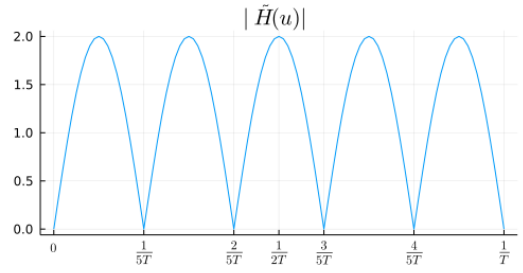
$$\tilde{H}(u) = (1 - \cos(10\pi uT)) - i\sin(10\pi uT)$$

La magnitud es

$$\tilde{H}(u) = \sqrt{(1 - \cos(10\pi uT))^2 + \sin^2(10\pi uT)}$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(10\pi uT) + \cos^2(10\pi uT) + \sin^2(10\pi uT)} = \sqrt{2 - 2\cos(10\pi uT)} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

El gráfico de la magnitud de la respuesta de frecuencia es:



→ **1 pt.**

Observamos que la respuesta de frecuencia alcanza el valor cero cinco veces en un período y que tiene un máximo valor de 2.

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

(e) Como el sistema es de respuesta finita al impulso, claramente es estable → **1 pt.**

(f) Como la respuesta de frecuencia es par, $\tilde{H}(u) = \tilde{H}(-u)$, y notando que las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI y que las frecuencias de las sinusoides son 3/5 y 1/2, la salida es simplemente

$$g[n] = \tilde{H}\left(\frac{3}{5}\right)\cos\left(\frac{6\pi n}{5}\right) + 0.5 * \tilde{H}\left(\frac{1}{2}\right)\cos(\pi n) = 0\cos\left(\frac{6\pi n}{5}\right) + 0.5 * 2\cos(\pi n) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

es decir,

$$g[n] = \cos(\pi n) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(g) Observando la respuesta de frecuencia, es claro que se asemeja a la forma de un peine o peineta, de ahí su nombre → **1 pt.**

2. (12 pts.) **Aliasing de señal modulada**. Considere una señal $f(t)$ de ancho de banda limitado $2B$, que ha sido modulada, esto es que se multiplica por una sinusoide de frecuencia a.

$$g(t) = f(t)\cos(2\pi a t)$$

(a) (2 pts.) Determine la Transformada de Fourier $G(u)$ de la señal modulada.

(b) (2 pts.) Bosqueje $G(u)$ indicando todos los puntos relevantes.

(c) (2 pts.) Determine la frecuencia de muestreo necesaria para reconstruir la señal $g(t)$ sin distorsión a partir de sus muestras, de acuerdo al Teorema del muestreo de Nyquist.

(d) (2 pts.) Proponga un método para a partir de la reconstrucción de $G(u)$ encontrar $F(u)$.

(e) (4 pts.) Determine si es posible utilizar una frecuencia de muestreo menor a la determinada en la parte anterior y aún ser capaz de reconstruir $f(t)$. Determine algún criterio que debiera cumplir $f(t)$ para que esto sea posible.

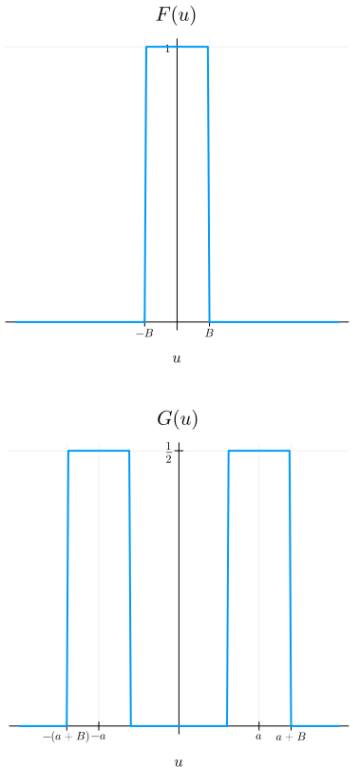
Solución

(a) Calcular la Transformada de Fourier es trivial en este caso

$$G(u) = F(u) * \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a}) = \frac{F(u-a)}{2} + \frac{F(u+a)}{2} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

(b) Los gráficos para $F(u)$ y para $G(u)$ se muestran a continuación:

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...



→ **2 pts.**

(c) Como la sinusoide es de frecuencia a entonces necesitamos, según el Teorema del muestreo de Nyquist, $u_s > 2(a + B)$ → **2 pts.**

(d) Vemos que como $G(u)$ es simplemente una suma de dos copias del espectro original $F(u)$ desplazadas y amplificadas por $1/2$. Entonces bastaría convolucionar $G(u)$ con un par de impulsos centrados en $-a$ y a para recuperar una copia exacta a $F(u)$ en el origen. Es decir, bastaría con hacer

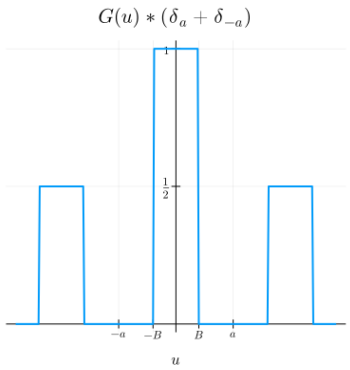
$$F(u) = G(u) * (\delta_a + \delta_{-a}) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

lo que en el dominio del tiempo es

$$\hat{f}(t) = g(t)\cos(2\pi a t)$$

para recuperar la señal original, lo que se conoce como demodulación.

Gráficamente, esto sería



Vemos que una vez hecha la demodulación, solo queda utilizar un filtro pasa-bajos para recuperar la señal original → **1 pt.**

(e) Observamos en el gráfico de $G(u)$ que hay un espacio vacio entre $-(a-B)$ y $(a-B)$ → **2 pts.** Podríamos utilizar una frecuencia de muestreo tal que una de las réplicas del espectro original quepa en ese espacio vacío → **1 pt.** Un criterio para que esto sea posible es que $B < a - B$ o bien $2B < a$ → **1 pt.**

3. (12 pts.) **Ecuación diferencial**. Considere un sistema LTI descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$g''(t) + 3g'(t) + 2g(t) = 2f(t)$$

con las condiciones iniciales $g(0) = 5, g'(0) = 4$.

Suponga que

(a) (2 pts.) Encuentre la función de transferencia del sistema.

(b) (4 pts.) Encuentre la respuesta total del sistema a la entrada $2e^{-3t}\sqcap(t)$.

(c) (2 pts.) Encuentre la respuesta a estado cero del sistema a la entrada anterior.

(d) (2 pts.) Encuentre la respuesta a entrada cero del sistema a la entrada anterior.

(e) (2 pts.) Encuentre la salida del sistema en reposo cuando la entrada es $e^{-4t}\sqcap(t)$

Solución

(a) Para encontrar la función de transferencia, que relaciona la salida de un sistema con la entrada, tomamos transformada de Laplace unilateral sin considerar las condiciones iniciales → **1 pt.** , de manera de cumplir con las condiciones de un sistema LTI:

$$s^2G(s) + 3sG(s) + 2G(s) = 2F(s)$$

por lo que

$$H(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{2}{s^2+3s+2} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(b) Para encontrar la respuesta total necesitamos tomar en cuenta las condiciones iniciales, por lo tanto tomando la Transformada unilateral a la ecuación diferencial tenemos:

$$s^2G(s) - sg(0) - g'(0) + 3(sG(s) - g(0)) + 2G(s) = 2\frac{2}{s+3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Incorporando los valores de las condiciones iniciales:

$$s^2G(s) - 5s - 4 + 3sG(s) - 15 + 2G(s) = (s^2 + 3s + 2)G(s) - 5s - 19 = \frac{4}{s+3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Notamos que $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$. Es claro que podemos calcular la respuesta del sistema separando los términos debido al sistema de los términos debidos a la entrada. Despejando $G(s)$:

$$G(s) = \underbrace{\frac{4}{(s+3)(s+2)(s+1)}}_{\text{Respuesta a estado cero}} + \underbrace{\frac{5s+19}{(s+2)(s+1)}}_{\text{Respuesta a entrada cero}}$$

Para calcular la salida total podemos usar el teorema de los residuos.

Para la respuesta a estado cero, para el primer polo calculamos

$$\lim_{s\to -3} e^{st}(s+3)\frac{4}{(s+3)(s+2)(s+1)} = e^{-3t}\frac{4}{(-1)(-2)} = 2e^{-3t}$$

Para el segundo polo

$$\lim_{s\to -2} e^{st}(s+2)\frac{4}{(s+3)(s+2)(s+1)} = e^{-2t}\frac{4}{(1)(-1)} = -4e^{-2t}$$

Para el tercer polo

$$\lim_{s\to -1} e^{st}(s+1)\frac{4}{(s+3)(s+2)(s+1)} = e^{-t}\frac{4}{(2)(1)} = 2e^{-t}$$

Para la respuesta a entrada cero, para el primer polo calculamos

$$\lim_{s\to -2} e^{st}(s+2)\frac{5s+19}{(s+2)(s+1)} = e^{-2t}\frac{-10+19}{-1} = -9e^{-2t}$$

Para el segundo polo

$$\lim_{s\to -1} e^{st}(s+1)\frac{5s+19}{(s+2)(s+1)} = e^{-t}\frac{-5+19}{1} = 14e^{-t}$$

Entonces, la salida total es

$$g(t) = (16e^{-t} - 13e^{-2t} + 2e^{-3t})\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

(c) Por inspección de la parte anterior, la respuesta a estado cero es

$$g_{\text{os}}(t) = (2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t})\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(d) Por inspección de la parte anterior, la respuesta a entrada cero es

$$g_{\text{oi}}(t) = (14e^{-t} - 9e^{-2t})\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(e) La salida en reposo, calculándola de forma similar a lo anterior es

$$(\frac{2}{3}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t})\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

4. (12 pts.) **Método de discretización mediante transformación invariante al impulso**. Suponga que se quiere discretizar un sistema LTI con función de transferencia $H(s)$ con el objetivo de encontrar una función $H(z)$, que represente la respuesta de frecuencia periódica del sistema discreto en el dominio z, donde z es una variable compleja. La discretización debe cumplir los siguientes requsitos:

   1. Una función racional $H(s)$ debe mapearse hacia una función racional $H(z)$.
   2. El eje imaginario del plano-s debe mapearse hacia el círculo unitario en el plano-z.
   3. El semi-plano izquierdo del plano-s debe quedar al interior del círculo unitario en el plano-z.

   Para esto, podría ser útil muestrear la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema, lo que implica que en este proceso se conserva la forma de la respuesta al impulso, de ahí el nombre del método. Para esto, se propone el mapeo $s = \ln(z)/T$, donde T es el período de muestreo. Veamos que tan bien funciona esta idea. Para esto, suponga que $H(s)$ puede escribirse de la forma

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

   Puede asumir que los polos son todos distintos y que los coeficientes A_k son constantes.

   (a) (2 pts.) Determine una expresión para la respuesta al impulso del sistema $h(t)$.

   (b) (2 pts.) Muestree la respuesta al impulso con un período de muestreo T para encontrar $h[n]$.

   (c) (2 pts.) Determine la respuesta de frecuencia (DTFT) del filtro discreto resultante.

   (d) (2 pts.) En base a la DTFT calculada anteriormente, encuentre una expresión para $H(z)$.

   (e) (4 pts.) Discuta la eficacia de este método de discretización en términos de las condiciones antes estipuladas y, en específico, determine para que tipo de filtros (pasa-bajos, pasa-bandas o pasa-altos) este método es aplicable.

Solución

(a) Sabemos que

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

Tomando transformada inversa de Laplace encontramos la respuesta al impulso

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) La versión muestreada, con período de muestreo T es

$$h[n] = h(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) Tomando la DTFT de la respuesta al impulso tenemos

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-i2\pi unT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} \sqcap[n] e^{-i2\pi unT} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT(s_k - i2\pi u)} = \sum_{k=1}^{N} A_k \frac{1}{1 - e^{-T(s_k - i2\pi u)}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} e^{-i2\pi uT}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(d) Sabemos que el mapeo entre el plano s y z es

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{i2\pi uT} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Observando en la parte interior que la Transformada de Fourier es evaluar la Transformada de Laplace en $s = i2\pi u$ deducimos que

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(e) La segunda condición requiere mapear el eje imaginario del plano s completo hacia el círculo unitario en el plano z. Sin embargo, el mapeo $s = \ln(z)/T$ no es un mapeo uno a uno, solo mapea un período del plano s hacia el círculo unitario en el plano z. En efecto, vemos que

$$z = e^{\sigma T} e^{i2\pi u + 2\pi \frac{k}{T} T}, \quad k \in \mathcal{Z} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

lo que implica que solo una franja horizontal de altura $\frac{1}{T}$ del plano s se mapea periódicamente hacia el círculo unitario $\rightarrow$ **1 pt.** Esto implica que las altas frecuencias, si sobrepasan este período, se traslaparán hacia las bajas frecuencias $\rightarrow$ **1 pt.** Por lo tanto, este método solo sirve para diseñar pasa-bajos y algunos tipos de pasa-bandas $\rightarrow$ **1 pt.**

5. (12 pts.) **Filtro adaptado (matched filter).** Suponga que la entrada a un filtro LTI discreto, conocido como filtro adaptado, es una señal $f[n]$ a la cual se suma una secuencia de ruido blanco estacionario (donde la amplitud de cada muestra es independiente de todas las otras y cuyas estadísticas no cambian en el tiempo), modelado por una variable aleatoria $w[n]$ que distribuye $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, es decir tiene media 0 y varianza σ^2. Denotamos la salida total del sistema como $g[n]$.

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

Para las secuencias aleatoras es útil determinar sus secuencias de autocorrelación. La secuencia de autocorrelación de una señal aleatoria estacionaria $\nu[n]$ se define como $r_\nu[\ell] = E\{\nu[n]\nu[n-\ell]\}$ donde E denota el valor esperado o esperanza de la variable aleatoria y ℓ denota un retraso. En el caso del ruido blanco, se sabe que $r_w[\ell]$ es de la forma $r_w[\ell] = \sigma^2\delta[\ell]$.

(a) (2 pts.) La densidad espectral de potencia de una señal discreta $f[n]$ cuya DTFT es $\tilde{F}(u)$ es $|\tilde{F}(u)|^2$. Es sabido además que la densidad espectral de potencia es la Transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Determine la densidad espectral de potencia de la señal $w[n]$.

(b) (4 pts.) Determine la contribución de la energía del ruido E_w a la energía total de la salida del sistema E_g.

(c) (4 pts.) Determine la razón señal a ruido, esto es la proporción entre la energía contribuída por la señal de entrada E_f con respecto a la energía del ruido E_w.

(d) (2 pts.) En base a lo anterior, proponga una explicación para el nombre del filtro (matched filter).

Solución

(a) Sabemos que la densidad espectral de potencia es la DTFT de la función de autocorrelación, es decir

$$|W(u)|^2 = \text{DTFT}\{r_w[l]\} = \text{DTFT}\{\sigma^2\delta[l]\} = \sigma^2 \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Observamos que la densidad espectral de potencia del ruido blanco es constante.

(b) Sabemos que la salida del sistema es

$$g[n] = h[n] * (f[n] + w[n]) = (h[n] * f[n]) + (h[n] * w[n]) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

donde $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema. Vemos que la parte de la salida que depende del ruido es $h[n] * w[n]$ $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

Podemos calcular su energía mediante el Teorema de Parseval en ambos dominios, es decir

$$E_w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] * w[n]|^2 = \frac{1}{T}\int_0^{1/T} |H(u)|^2|W(u)|^2 du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Pero sabemos que la densidad espectral de potencia es constante, por lo que

$$E_w = \frac{\sigma^2}{T}\int_0^{1/T} |H(u)|^2 du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c) Para calcular la energía de la salida que se debe a la entrada f podemos utilizar el mismo raciocinio

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n] * h[n]|^2 = \frac{1}{T}\int_0^{1/T} |F(u)|^2|H(u)|^2 du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Ahora, de acuerdo a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, sabemos que

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

$$\frac{1}{T}\int_0^{1/T} |F(u)|^2|H(u)|^2 du \leq \frac{1}{T}\left(\int_0^{1/T} |F(u)|^2 du\right)\left(\int_0^{1/T} |H(u)|^2\right) du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo que la razón señal a ruido es

$$\frac{E_f}{E_w} \leq \frac{\frac{1}{T}(\int_0^{1/T} |F(u)|^2 du)(\int_0^{1/T} |H(u)|^2 du)}{\frac{\sigma^2}{T}\int_0^{1/T} |H(u)|^2 du} = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{1/T} |F(u)|^2 du \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(d) Observamos que la razón señal a ruido tiene la forma de la densidad espectral de potencia de la señal de entrada $\rightarrow$ **1 pt.** La máxima razón señal a ruido se alcanza cuando $H(u)$ tiene la forma de $F(u)$, que es cuando la desigualdad se convierte en igualdad, de ahí el nombre del filtro $\rightarrow$ **1 pt.**