Interrogación 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (a) (5 pts.) Encuentre el valor de (t real):

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\sqcap(t+1) + \sqcap(t)][\delta(1-2t) + 2\delta(t+1)]dt$$

Solución:

En primer lugar, notamos que $\delta(1-2t) = \frac{1}{2}\delta(t-\frac{1}{2})$ utilizando la definición del impulso de una función. Además, en los puntos de discontinuidades, las funciones $\sqcap(t)$ y $\sqcap(t)$ tienden al valor medio. Expandiendo los términos de la integral, tenemos entonces:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(t+1)\delta(t-\frac{1}{2})dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(t+1)\delta(t+1)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(t)\delta(t-\frac{1}{2})dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(t)\delta(t+1)dt$$

Utilizando la propiedad del cedazo:

$$\frac{1}{2}\sqcap(\frac{1}{2}+1) + 2\sqcap(0) + \frac{1}{2}\sqcap(\frac{1}{2}) + 2\sqcap(-1)$$

Evaluando,

$$\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Esta pregunta también se pudo haber resuelto mediante el cambio de variables $u = 2t$, $\frac{du}{2} = dt$ para el caso $\delta(1-2t)$.

(b) (5 pts.) Demuestre que se cumple (x real):

$$\frac{1}{3} \uparrow\uparrow \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\delta(4x^3 - 3x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta(x)$$

Solución:

Lo primero que hay que hacer es evaluar $\delta(4x^3 - 3x)$. La raíces son $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces,

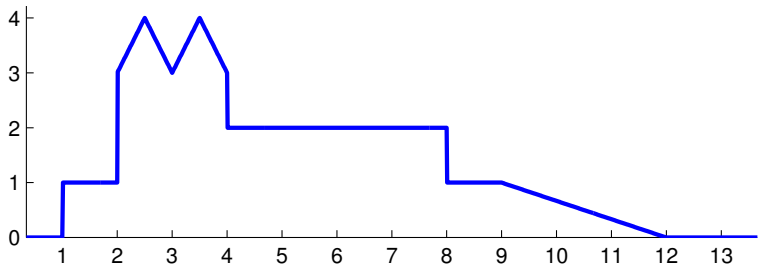
$$\delta(4x^3 - 3x) = \frac{\delta(x)}{3} + \frac{\delta(x-\frac{\sqrt{3}}{2})}{6} + \frac{\delta(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{6}$$

Reemplazando en la parte derecha de la ecuación,

$$\sqrt{3}\frac{\delta(x)}{3} + \sqrt{3}\frac{\delta(x-\frac{\sqrt{3}}{2})}{6} + \sqrt{3}\frac{\delta(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\delta\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}\delta\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \uparrow\uparrow \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)$$

2. (5 pts.) Escriba la función Gato(x) que se muestra en la figura como un suma de funciones conocidas en análisis de señales. Encuentre el resultado, gráfica o analíticamente, de la convolución entre la función Gato(x) y la función signo sgn(x).

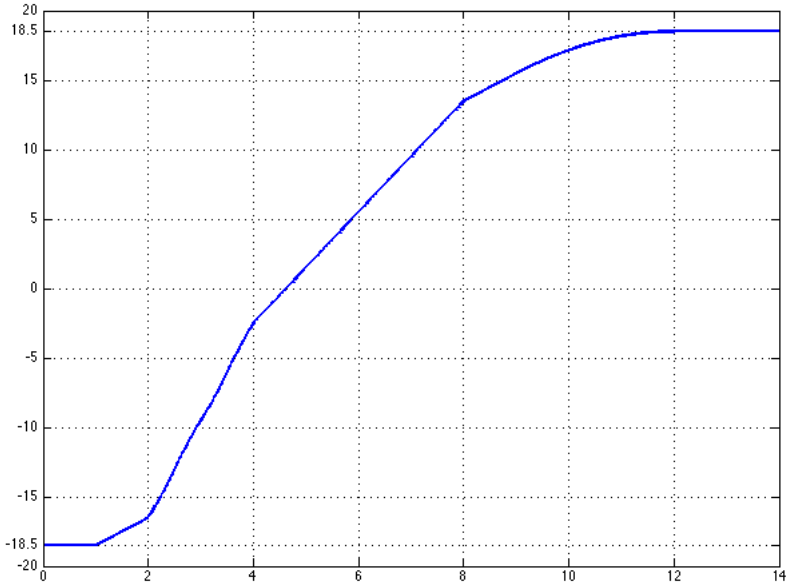


Solución:

Esta función puede escribirse de muchas maneras distintas. Una de éstas es:

$$\text{Gato}(x) = \sqcap(\frac{x-5}{8}) + \sqcap(\frac{x-5}{6}) + \sqcap(\frac{x-3}{2}) + \wedge(2x-5) + \wedge(2x-7) + \sqcap(\frac{x-10.5}{3}) \times (4 - \frac{x}{3})$$

La forma más simple de calcular la convolución de Gato(x) con la función signo es en forma gráfica, y se muestra a continuación:

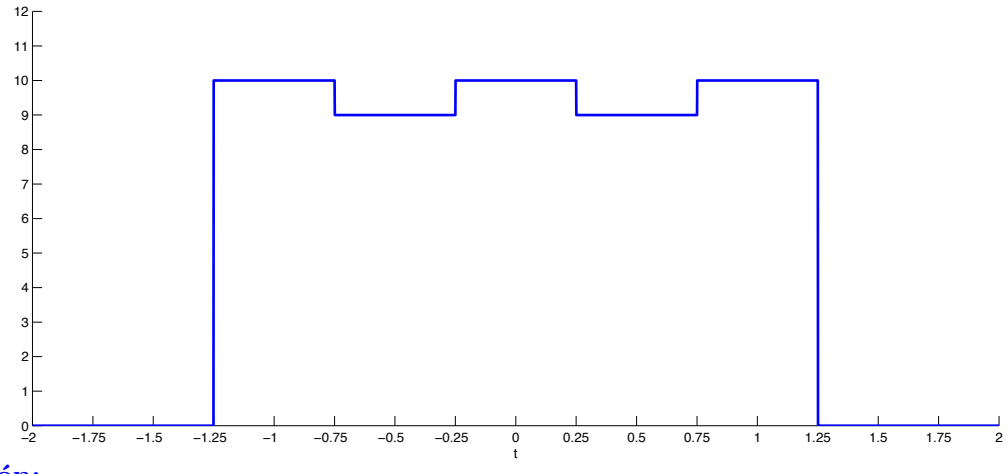


Al convolucionar esta función con un signo, es evidente que la convolución experimentará un cambio de signo también. Es importante notar que en los extremos, dado que la función signo no es acotada en x, la convolución es igual al área de la función Gato, que es 18.5. También son importantes los cruces por cero y los lugares donde hay cambio de pendiente.

3. (5 pts.) En sus momentos de esparcimiento en un Laboratorio de Electrónica usted logra generar la señal Torre (t) en un osciloscopio, cuya gráfica se describe a continuación en la figura de la página siguiente.

   (a) (3 pts.) Escriba la señal Torre (t) empleando exclusivamente funciones escalón unitario y sus transformaciones básicas.

   (b) (2 pts.) Usted desea construir toda una fortaleza y para ello requiere generar una función periódica a partir de la función Torre (t). Determine condiciones sobre $a > 0$ de modo que en la función Fortaleza $(t) =$ Torre $(t) * \frac{1}{a}\text{Ш}\left(\frac{t}{a}\right)$ se pueda distinguir cada función Torre de la otra, i.e. no se superpongan dos funciones Torre en el gráfico resultante.



Solución:

(a) Los puntos de cambio de comportamiento de la función están dados en $-\frac{5}{4}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{4}$. De esta forma, se puede escribir la función sumando y restando apropiadamente los escalones:

$$\text{Torre}\,(t) = 10\sqcap\left(t+\frac{5}{4}\right)-\sqcap\left(t+\frac{3}{4}\right)+\sqcap\left(t+\frac{1}{4}\right)-\sqcap\left(t-\frac{1}{4}\right)+\sqcap\left(t-\frac{3}{4}\right)-10\sqcap\left(t-\frac{5}{4}\right)$$

(b) El largo total de la función Torre (t) es $2 \times \frac{5}{4}$, de modo que si los centros de cada torre están a una distancia menor a $\frac{10}{4}$ se superpondrán las torres y se producirá un fenómeno conocido como *aliasing*. Por esta razón, y pensando en el efecto generado al convolucionar con shah, recordamos que:

$$\frac{1}{a}\text{Ш}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{a}-n\right)$$

Usando propiedad del delta de una función:

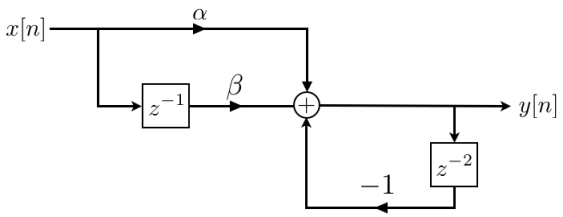
$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\text{Ш}\left(\frac{1}{a}\right) &= \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\delta\left(x-na\right)}{1/a}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-na\right)\end{aligned}$$

Es decir, la distancia entre impulsos es a. Como la distancia tiene que ser mayor a $10/4$, finalmente tenemos que

$$a > \frac{10}{4}$$

es la condición necesaria y suficiente.

4. (10 pts.) Considere el sistema descrito mediante el siguiente diagrama de bloques:



(a) (2 pts.) Determine su ecuación de diferencias.

(b) (2 pts.) Encuentre una representación del sistema en variables de estado.

(c) (4 pts.) Asuma que el sistema parte del reposo, es decir, en estado cero. Determine la respuesta al escalón unitario mediante el método que usted estime conveniente.

(d) (2 pts.) Nuevamente asumiendo que el sistema parte del reposo, determine los valores de α y β de modo que la respuesta al impulso sea

$$h\left[n\right] = \frac{\left(7i^n - \left(-i\right)^n\right)}{2}\sqcap\left[n\right]$$

Solución:

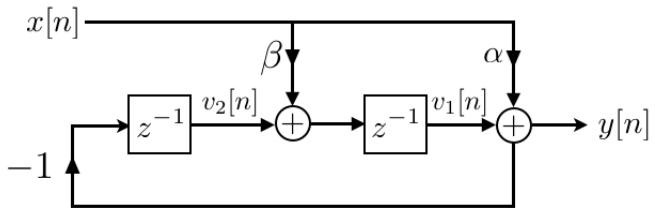
(a) Por simple inspección del gráfico:

$$y\left[n\right] = -y\left[n-2\right] + \alpha x\left[n\right] + \beta x\left[n-1\right]$$

O análogamente,

$$y\left[n\right] + y\left[n-2\right] = \alpha x\left[n\right] + \beta x\left[n-1\right]$$

(b) Para encontrar una representación en variables de estado, se debe expresar el sistema en alguna de las formas directas utilizando dos retrasos, de acuerdo a la siguiente figura:



Utilizando las salidas de los retrasos como variables de estado, $v_1[n]$ y $v_2[n]$, tenemos:

$$y[n] = v_1[n] + \alpha x[n]$$

$$v_1[n+1] = v_2[n] + \beta x[n]$$

$$v_2[n+1] = -y[n] = -v_1[n] - \alpha x[n]$$

Luego,

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \alpha \mathbf{x}[n]$$

(c) Queremos resolver la ecuación de diferencias

$$y\,[n] + y\,[n-2] = \alpha \sqcap [n] + \beta \sqcap [n-1] \quad \text{con } y\,[-1] = y\,[-2] = 0$$

Resolveremos está ecuación mediante la separación en una solución particular y otra homogénea.

$$y\,[n] = y_p\,[n] + y_h\,[n]$$

Primero haremos la **solución particular**. Resolvamos para $n = 0$. En este caso, la solución propuesta es de la forma K, de modo que

$$K + K = \alpha \rightarrow K = \frac{\alpha}{2}$$

Para $n \geq 1$ proponemos una solución de la forma M, de modo que

$$M + M = \alpha + \beta \rightarrow M = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Para $n < 0$ la solución particular es evidentemente la trivial, 0. Por lo tanto,

$$y_p[n] = \frac{\alpha}{2}\sqcap[n] + \frac{\beta}{2}\sqcap[n-1]$$

Ahora pasaremos a resolver la **parte homogénea**. Para ello planteamos el polinomio característico,

$$1 + z^{-2} = 0 \rightarrow z = \pm i$$

Es decir,

$$y_h[n] = Ai^n + B(-i)^n$$

Esto implica que la solución general es:

$$h_{\sqcap}[n] = Ai^n + B(-i)^n + \frac{\alpha}{2}\sqcap[n] + \frac{\beta}{2}\sqcap[n-1] \quad \text{para } n \geq 0$$

Para $n = -1$ se tiene que:

$$h_{\sqcap}[-1] = -Ai + Bi = 0$$

Para $n = -2$, de forma análoga

$$h_{\sqcap}[-2] = -A - B = 0 \rightarrow A = B = 0$$

Para $n < 0$ se tiene que la solución viene dada por la homogénea y bajo las mismas condiciones iniciales, razón por la cual los coeficientes también son cero. De esta forma,

$$h_{\sqcap}[n] = \frac{\alpha}{2}\sqcap[n] + \frac{\beta}{2}\sqcap[n-1]$$

(d) Supongamos que efectivamente la solución propuesta anteriormente es correcta. Dados los parámetros α y β resolveremos la ecuación de diferencias:

$$y[n] = -y[n-2] + \alpha\delta[n] + \beta\delta[n-1]$$

Para $n \geq 0$ resolvemos por iteración:

$$\begin{aligned}
y[0] &= -y[-2] + \alpha + \beta \cdot 0 = \alpha \\
y[1] &= -y[-1] + \alpha \cdot 0 + \beta = \beta \\
y[2] &= -y[0] = -\alpha \\
y[3] &= -y[1] = -\beta \\
y[4] &= -y[2] = \alpha \\
y[5] &= -y[3] = \beta \\
&\dots
\end{aligned}$$

La regularidad se hace evidente. Esto lo podemos escribir en analogía a la función seno y coseno mediante la expresión:

$$h[n] = \frac{\alpha}{2}\left[i^n + (-i)^n\right] + \frac{\beta}{2}\left[i^n - (-i)^n\right] \qquad \boxed{\text{¡¡para } n \geq 0\text{!!}}$$

Para $n < 0$ nos enfrentamos solamente a la ecuación homogénea, cuya solución es de la forma

$$h[n] = Ai^n + B(-i)^n$$

Como la solución parte del reposo, podemos establecer inmediatamente que las condiciones de las constantes son $A = B = 0$. Notar que esta parte también se podría haber resuelto de forma iterativa:

$$\begin{aligned} y[-1] &= 0 \\ y[-2] &= 0 \\ y[-3] &= y[-1] = 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Finalmente,

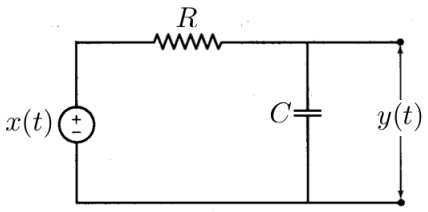
$$h[n] = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}i^n + \frac{\alpha-\beta}{2}(-i)^n\right)\sqcap[n]$$

Para que la solución sea la pedida, debe cumplirse que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{2} \quad ; \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{1}{2}$$

De modo que resolviendo el sistema se obtiene $\alpha = 3$ y $\beta = 4$.

5. (10 pts.) Considere el circuito eléctrico RC de la siguiente figura, donde la entrada es el voltaje $x(t)$ y la salida el voltaje en el condensador $y(t)$:



(a) (2 pts.) Escriba la ecuación diferencial que describe el sistema

(b) (2 pts.) Dibuje su diagrama de bloques

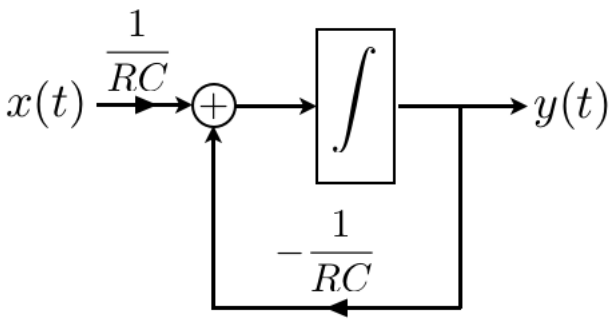
(c) (4 pts.) Calcule la respuesta del sistema cuando la entrada es $e^{-at}\sqcap(t)$.

(d) (2 pts.) Grafique aproximadamente la respuesta a la entrada anterior cuando $a = 3$, $C = \frac{1}{6}F$ y $R = 2\Omega$.

Solución:

(a) La ecuación diferencial es $y'(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$.

(b) El diagrama de bloques utilizando un integrador es



(c) La solución a esta ecuación fue vista en clases y es de la forma

$$y(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\int_{\tau=0}^{t} x(\tau)e^{\frac{\tau}{RC}}d\tau\sqcap(t)$$

Esta solución se obtiene fácilmente mediante el método de factor integrante. Desarrollando la ecuación con la entrada solicitada.

$$y(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\int_{\tau=0}^{t} e^{-a\tau}e^{\frac{\tau}{RC}}d\tau\sqcap(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\int_{\tau=0}^{t} e^{\frac{(1-aRC)}{RC}\tau}d\tau\sqcap(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\frac{RC}{1-aRC}e^{\frac{(1-aRC)}{RC}\tau}|_0^t\sqcap(t) = \frac{1}{1-aRC}e^{\frac{-t}{RC}}[e^{\frac{1-aRC}{RC}t} - 1]\sqcap(t)$$

$$y(t) = \left(-\frac{1}{1-aRC}e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{1}{1-aRC}e^{-at}\right)\sqcap(t)$$

Dado que la condición inicial no está especificada, es necesario agregar el término $y_0e^{-\frac{1}{RC}t}$, a la solución anterior, donde $y_0 = y(0)$. Por lo tanto,

$$y(t) = y_0e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{1}{1-aRC}e^{-\frac{t}{RC}}\sqcap(t) + \frac{1}{1-aRC}e^{-at}\sqcap(t)$$

Evidentemente esta solución no es válida cuando $aRC = 1$.

A exactamente la misma solución se puede llegar mediante el método de coeficientes indeterminados. Sabemos que $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$. Calculemos primero la solución particular. Asumimos $y_p(t) = Ke^{-at}$. Reemplazando en la ecuación:

$$-aKe^{-at} + \frac{K}{RC}e^{-at} = \frac{1}{RC}e^{-at}$$

Igualando coeficientes:

$$K(1 - aRC) = 1$$

por lo tanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{1 - aRC} e^{-at} \sqcap(t)$$

Para la homogénea, resolvemos el polinomio $p + \frac{1}{RC} = 0$, por lo que $p = -\frac{1}{RC}$. Entonces, $y_h(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$.
Por lo tanto,

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{1 - aRC} e^{-at} \sqcap(t)$$

Para calcular el coeficiente A, hay que suponer alguna condición inicial $y(0) = y_0$, entonces

$$y(0) = y_0 = A + \frac{1}{1 - aRC}$$

Por lo tanto,

$$A = y_0 - \frac{1}{1 - aRC}$$

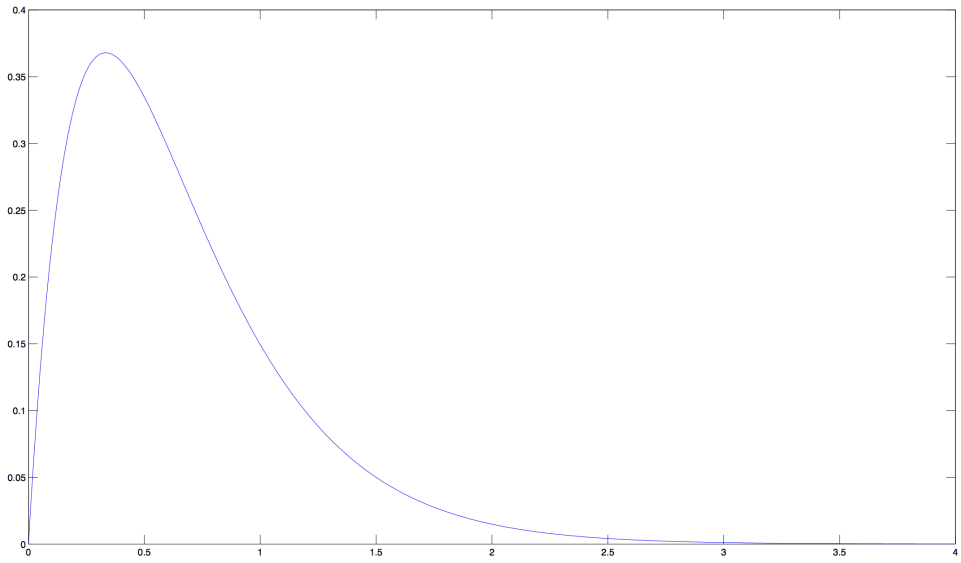
Con lo que la solución completa es

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{1}{1 - aRC} e^{-\frac{t}{RC}} \sqcap(t) + \frac{1}{1 - aRC} e^{-at} \sqcap(t)$$

(d) En este caso, los valores escogidos invalidan la solución anterior porque $aRC = 3 \times 2 \times \frac{1}{6} = 1$. La ecuación diferencial con estos valores queda $y'(t) + 3y(t) = 3x(t)$ y la entrada es e^{-3t}.
La solución es, asumiendo $y_0 = 0$:

$$y(t) = 3e^{-3t} \int_{\tau=0}^{t} e^{-3\tau} e^{3\tau} d\tau \sqcap(t) = 3e^{-3t} \int_{\tau=0}^{t} d\tau \sqcap(t) = 3te^{-3t} \sqcap(t)$$

Esto es equivalente a escoger una solución de la forma Ate^{-3t} como la solución particular. El gráfico es:



6. (10 pts.) Considere los dos siguientes sistemas discretos

   - $S_1 : y[n] = (x[n] + x[n-1])^2$
   - $S_2 : y[n] = x[n] + x[n-1]$

   (a) (4 pts.) Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ de ambos sistemas.
   (b) (4 pts.) Calcule la respuesta a la entrada $a^n \sqcap[n]$ para ambos sistemas, con $a < 1$.
   (c) (2 pts.) Explique la utilidad de la respuesta al impulso en ambos casos.

Solución:

(a) La respuesta al impulso, para ambos casos, es:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & n \neq 0, 1 \end{cases}$$

(b) Para S_1, la respuesta puede calcularse mediante iteración:

$$y[0] = (x[0] + x[-1])^2 = (1 + 0)^2 = 1$$
$$y[1] = (x[1] + x[0])^2 = (a + 1)^2$$
$$y[2] = (x[2] + x[1])^2 = (a^2 + a)^2$$

Finalmente,

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2 = (a^n + a^{n-1})^2 = a^{2n} + 2a^{2n-1} + a^{2n-2}, \quad n > 0$$

Para S_2, como el sistema es lineal, podemos utilizar la suma de convolución con la respuesta al impulso, es decir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[n]$$

En este caso,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{1} a^{n-k}1 = a^{n-0} + a^{n-1} = a^n + a^{n-1}, \quad n > 0$$

(c) Para S_1, como el sistema no es lineal, la respuesta al impulso no tiene utilidad pues no determina totalmente la salida del sistema. Para S_2, al ser el sistema lineal, podemos convolucionar la entrada con la respuesta al impulso.

7. (BONUS 5 pts.) En una aplicación práctica se desea estudiar el comportamiento de un circuito eléctrico continuo y LTI de modo de obtener algunas de sus principales características. Usted sabe que el sistema está caracterizado por la respuesta al impulso. Sin embargo, obtenerla resulta difícil en la práctica ya que es imposible emular de forma cercana a lo ideal las condiciones que exige una función impulsiva.

   Es por esta razón que se debe elegir la respuesta a otra entrada mas fácil de reproducir como la función $\sqcap(t)$. Se puede realizar el estudio de la *respuesta al rect*, $h_{\sqcap}(t)$ y luego obtener la respuesta al impulso $h(t)$ mediante las operaciones adecuadas.

   Para lograr este propósito, responda las siguientes preguntas:

   (a) (2 pts.) Muestre que la salida del sistema a la entrada $\frac{d}{dt}\sqcap(t)$ es $\frac{d}{dt}h_{\sqcap}(t)$.

   (b) (3 pts.) Escriba una expresión lo más simplificada posible que exprese la respuesta al rect $h_{\sqcap}(t)$ en función de la respuesta al impulso $h(t)$ y $\delta(t)$.

Solución:

(a) Tenemos que la respuesta de $\sqcap'(t)$ es $\sqcap'(t) * h(t)$ ya que el sistema es LTI. Por propiedad,

$$\sqcap'(t) * h(t) = \frac{d}{dt}\sqcap(t) * h(t) = \frac{d}{dt}h_{\sqcap}(t)$$

demostrando así lo pedido.

(b) Tenemos que

$$\sqcap'(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2 \uparrow\downarrow (t)$$

Luego, ya sabemos que la respuesta a $\sqcap'(t)$ es $h'_{\sqcap}(t)$ de modo que por principio de identidad $h'_{\sqcap}(t) = L\left\{\delta\left(t+\frac{1}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\}$ donde L representa la aplicación del sistema. Por linealidad e invarianza del sistema tenemos que

$$h'_{\sqcap}(t) = h\left(t+\frac{1}{2}\right) - h\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

o bien,

$$h_{\sqcap}(t) = \int_{t_0}^{t} h\left(\xi+\frac{t}{2}\right) - h\left(\xi-\frac{t}{2}\right) d\xi$$

donde t_0 es un punto conocido de la respuesta al impulso del sistema o de su respuesta al rect. Sin embargo, para nuestros propósitos (despejar la respuesta al impulso), la primera resulta más conveniente.