Prueba 4

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Se tiene la señal discreta $x[n]$ de largo N (par). Suponga también que se tiene la DFT de largo $N/2$ de las muestras pares e impares, es decir

$$x[2m] \longrightarrow F[k] \;\text{ con }\; m,k = 0 \cdots N/2-1$$

y

$$x[2m+1] \longrightarrow G[k] \;\text{ con }\; m,k = 0 \cdots N/2-1$$

Encuentre la DFT de $x[n]$ en función de $F[k]$ y $G[k]$.

Resultado: Es bastante evidente que este es un paso de la FFT. Tenemos

$$\begin{aligned}(x_o,\ x_2,\ x_4,\ \cdots\ x_{N-2}) &\longrightarrow (F_o,\ F_1,\ F_2,\ \cdots\ F_{N/2-1})\\ (x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots\ x_{N-1}) &\longrightarrow (G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1})\end{aligned}$$

Lo primero que vamos a hacer es estirar intercalando ceros

$$\begin{aligned}(x_o,\ 0,\ x_2,\ 0,\ x_4,\ \cdots\ x_{N-2},\ 0) &\longrightarrow \frac{1}{2}(F_o,\ F_1,\ F_2,\ \cdots\ F_{N/2-1},\ F_o,\ F_1,\ F_2,\ \cdots\ F_{N/2-1})\\ (x_1,\ 0,\ x_3,\ 0,\ x_5,\ \cdots\ x_{N-1},\ 0) &\longrightarrow \frac{1}{2}(G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1},\ G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1})\end{aligned}$$

Ahora desplazamos la segunda

$$(0,\ x_1,\ 0,\ x_3,\ \cdots\ x_{N-1}) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-i2\pi k/N}(G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1},\ G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1})$$

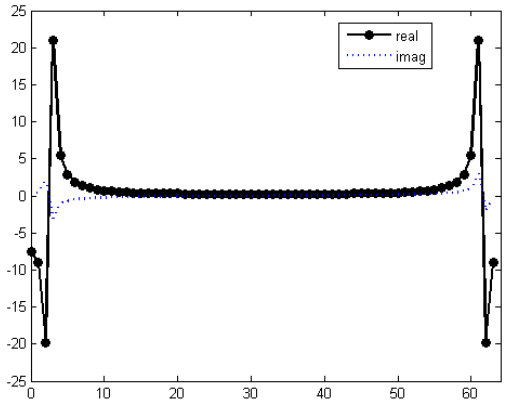
Y la suma de la primera con la segunda desplazada será

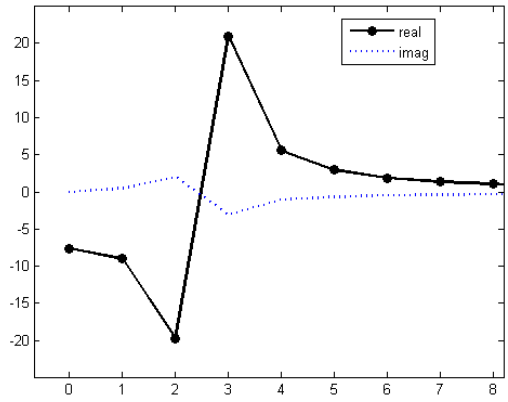
$$\begin{aligned}(x_o,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\ x_{N-1}) \longrightarrow\ & \frac{1}{2}(F_o,\ F_1,\ F_2,\ \cdots\ F_{N/2-1},\ F_o,\ F_1,\ F_2,\ \cdots\ F_{N/2-1})\\ & +\frac{1}{2}e^{-i2\pi k/N}(G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1},\ G_o,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{N/2-1})\end{aligned}$$

En otras palabras

$$x[n] \longrightarrow X[k] = \frac{1}{2}(F_k + e^{-i2\pi k/N}G_k)$$

2. [6 ptos] Calcule la frecuencia a la que oscila un diapasón (que se supone emite un tono puro) si se conoce la DFT de un muestreo del audio producido por él, tal como se muestra en las figuras. En la primera está el espectro completo y en la segunda una ampliación de la parte relevante. La señal fue muestreada a 10 kHz.





Resultado: Se sabe que la frecuencia de muestreo es 10 kHz, por lo que $T = 0.1$ ms. Del gráfico podemos ver que $N = 64$, por lo que usando $NUT = 1$ tenemos

$$U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{64 \cdot 0.1} = \frac{1}{6.4} \approx 0.16 \text{ kHz}.$$

Del gráfico también vemos que el peak ocurre entre las muestras 2 y 3 (claramente hay derrame, sino habría un peak único). Supongamos 2.5. Es decir la frecuencia es $2.5 \cdot 0.16 \approx 0.4$ kHz. Como dato cultural, el diapasón más usado tiene un tono de 440 Hz.

3. [6 ptos] Se conoce $X[k]$, la DFT de $x[n]$, excepto por el término $X[j]$ que se perdió. Adicionalmente se sabe que tanto la parte real como imaginaria del término perdido $X[j]$ están en el rango $(-1, 1)$. Para estimar $x[n]$ se toma la DFT inversa a $X[k]$ considerando $X[j] = 0$ para obtener $\hat{x}[n]$. Para cuantificar el error cometido encuentre:

   (a) [3 ptos] El error máximo en las componentes del vector, es decir,

   $$E_M = \max_n |x[n] - \hat{x}[n]|.$$

   Indique en cuál componente se produce el error máximo.

   (b) [3 ptos] El error cuadrático medio, es decir,

   $$E_m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n |x[n] - \hat{x}[n]|^2}$$

   donde N es el largo del vector.

Resultado: Sea $X[j] = a$ el valor que se perdió (más fácil escribirlo). El valor correcto de $x[n]$ será

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi nk/N}$$

y la estimación de $x[n]$ será

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi nk/N} \quad \text{con} \quad X[j] = 0$$

Por lo que el error será la diferencia

$$x[n] - \hat{x}[n] = a e^{i2\pi nj/N}$$

(a) Para calcular el error máximo notamos que

$$|x[n] - \hat{x}[n]| = |a e^{i2\pi nj/N}| = |a|$$

Cuyo máximo obviamente es $|a|$, y como no depende de n todas las componentes tendrán el mismo error.

(b) Para el error cuadrático medio, tenemos

$$E_m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n |x[n] - \hat{x}[n]|^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n |a|^2} = \sqrt{\frac{1}{N} N |a|^2} = |a|$$

4. [6 ptos] Se tiene un sistema que implementa una STFT (Short Time Fourier Transform) que está compuesto por dos partes: la primera selecciona un trozo de señal de largo M centrado en p con una ventana de apodización deslizante $w[n-p]$; y la segunda toma la DFT de cada trozo. Suponga que la señal comienza y termina con suficientes ceros como para no tener problemas en los extremos. El espectrograma es $S[k,p]$ donde k es el índice de Fourier (columnas) y p la posición temporal (filas).

   (a) [4 ptos] Si la señal es el impulso discreto $\delta[n-q]$ y $w[n] = \sqcap_{R+\epsilon}[n]$, donde $\sqcap_{R+\epsilon}[n] = 1$ si $|n| \leq R$ y 0 en los otros casos (es decir, un rect "levemente más ancho que $2R$"), encuentre $S[k,p]$.

   (b) [2 ptos] Si la señal es el impulso discreto $\delta[n-q]$ y $w[n] = \wedge_R[n]$, un triángulo de base $2R$, encuentre $S[k,p]$.

Resultado:

(a) Sea $x[n]$ la señal, es decir

$$x[n] = \delta[n-q]$$

Para cada p, la señal es apodizada con

$$w[n] = \sqcap_{R+\epsilon}[n-p]$$

es decir, la señal apodizada es

$$x_p[n] = \delta[n-q] \sqcap_{R+\epsilon}[n-p]$$

que es el producto de un delta centrado en q con un rect centrado en p. Si redefinimos el origen de la señal apodizada a $n = p$, tenemos que la señal apodizada en las nuevas coordenadas es

$$y_p[n] = \delta[n-(q-p)] \sqcap_{R+\epsilon}[n]$$

$$y_p[n] = \delta[n-(q-p)] \;\text{ si } |q-p| \leq R$$

Cuya transformada de Fourier será

$$\delta[n-(q-p)] \longrightarrow e^{-i2\pi(q-p)k/N}$$

De donde

$$S[k,p] = e^{-i2\pi(q-p)k/N} \sqcap_{R+\epsilon}[q-p]$$

(b) Repitiendo los mismos pasos anteriores tenemos:
Sea $x[n]$ la señal, es decir

$$x[n] = \delta[n-q]$$

Para cada p, la señal es apodizada con

$$w[n] = \wedge_R[n-p]$$

es decir, la señal apodizada es

$$x_p[n] = \delta[n-q] \wedge_R [n-p]$$

que es el producto de un delta centrado en q con un triángulo centrado en p. Si redefinimos el origen de la señal apodizada a $n = p$, tenemos que la señal apodizada en las nuevas coordenadas es

$$y_p[n] = \delta[n-(q-p)] \wedge_R [n]$$

$$y_p[n] = \left(1 - \left|\frac{q-p}{R}\right|\right) \delta[n-(q-p)] \;\text{ si } |q-p| \leq R$$

Cuya transformada de Fourier será

$$\delta[n-(q-p)] \longrightarrow \left(1 - \left|\frac{q-p}{R}\right|\right) e^{-i2\pi(q-p)k/N}$$

De donde

$$S[k,p] = \left(1 - \left|\frac{q-p}{R}\right|\right) e^{-i2\pi(q-p)k/N} \sqcap_{R+\epsilon}[q-p]$$