IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 3

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2023
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 60
Fecha: 09/06/2023

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- **Responda cada pregunta en hojas separadas y entregue 5 hojas de respuestas, aunque estén en blanco**. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Sistema multiplicador**. Considere el siguiente sistema $f \to g$:

$$g(t) = f(t)\cos(\pi u_0 t)$$

Suponga que la entrada al sistema es la señal $f(t) = \cos(\pi u_0 t)$

(a) (3 pts.) Determine la función de transferencia del sistema.

(b) (3 pts.) Determine la salida del sistema $g(t)$.

(c) (3 pts.) Determine la frecuencia de muestreo necesaria para muestrear $g(t)$ de manera de evitar aliasión.

(d) (3 pts.) Determine la cantidad de muestras y el período de muestreo necesarios de tal forma que en la DFT de $g[n]$ no haya derrame.

Solución

(a) Este sistema multiplica la entrada por una función, lo que implica que la respuesta al impulso será simplemente un impulso amplificado por el valor del coseno en 0, es decir $1\delta = \delta$ → **1 pt.** Dado que la respuesta al impulso es un impulso, no tiene una función de transferencia o respuesta de frecuencia propiamente tal, porque no decae a cero en el infinito → **2 pts.** Otra forma de ver esto es que el sistema es invariante y por lo tanto no puede estar especificado completamente por una convolución con una única respuesta al impulso.

(b) Observamos que tanto la entrada como el sistema contienen sinusoides de frecuencia $u_0/2$ → **1 pt.** Al multiplicarse, sus horquillas se convolucionan resultando en una sinusoide de frecuencia u_0 y otra de frecuencia 0, con la mitad de la amplitud, es decir

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi u_0 t) \to \textbf{2 pts.}$$

(c) Como el componente de frecuencia más agudo es u_0, la frecuencia de muestreo necesaria para evitar aliasión es $u_s > 2u_0$ → **3 pts.**

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

(d) Como la salida es periódica, nos interesa escoger un N tal que quede un período exacto o un múltiplo del período en las N muestras de la secuencia discreta para evitar el derrame → **1 pt.** Es decir, queremos

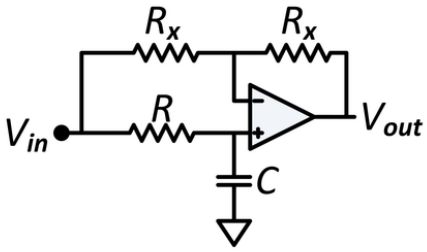
$$NT = \frac{k}{u_0}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, lo que implica que, dado un T, se necesita

$$N = \frac{k}{u_0 T}$$

Vemos que esto claramente no es posible para todo valor de $u_0 T$ → **1 pt.** Por ejemplo, si $u_0 T$ es un número irracional, no es posible evitar el derrame → **1 pt.**

2. (12 pts.) **Amplificador operacional**. Considere el amplificador operacional descrito por el siguiente circuito eléctrico:



La función de transferencia de este circuito es:

$$H(s) = -\frac{1 - sRC}{1 + sRC}$$

donde R es el valor de la resistencia y C el valor de la capacitancia.

(a) (3 pts.) Determine la magnitud y fase de la respuesta de frecuencia del circuito de forma analítica.

(b) (2 pts.) Bosqueje la respuesta de magnitud y fase del circuito.

(c) (1 pto.) En base a lo anterior, determine que tipo de filtro implementa el circuito (pasa-bajos, pasa-altos, etc).

(d) (6 pts.) Determine la salida si la entrada es una sinusoide de frecuencia $\frac{4}{RC}$.

Solución

NOTA: Hay un error de tipeo en la pregunta, la respuesta de frecuencia del circuito no lleva un signo $-$ adelante realmente. Sin embargo, no influye para efectos de los cálculos, solo habría que anteponer un signo $-$ en todas las expresiones e invertir los gráficos.

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

(a) Sabemos que

$$H(s) = \frac{1 - sRC}{1 + sRC} = \frac{1/RC - s}{1/RC + s}$$

vemos que esta función de transferencia tiene un cero en $1/RC$ y un polo en $-1/RC$ → **1 pt.** Vemos que ambas cantidades están a distancias equitativas del eje imaginario, por lo que el efecto del polo en la respuesta de frecuencia se cancela con el efecto del cero. Esto implica que la magnitud debiera ser uno, en efecto

$$|H(u)| = |H(s)|\Big|_{s=i2\pi u} = \frac{|1/RC - i2\pi u|}{|1/RC + i2\pi u|} = \frac{\sqrt{(1/RC)^2 + 4\pi^2 u^2}}{\sqrt{(1/RC)^2 + 4\pi^2 u^2}} = 1 \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Además, vemos que

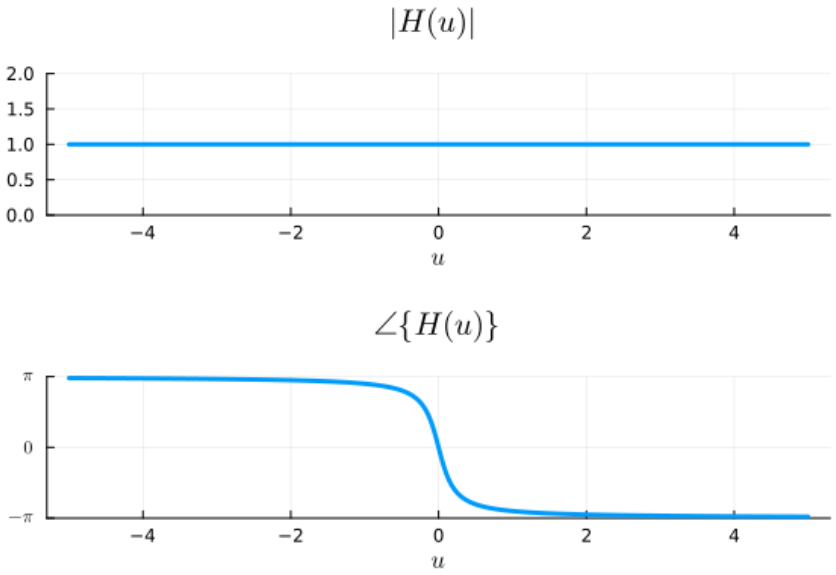
$$H(u) = \frac{1/RC - i2\pi u}{1/RC + i2\pi u} = \frac{1/RC - i2\pi u}{1/RC + i2\pi u} \times \frac{1/RC - i2\pi u}{1/RC - i2\pi u}$$

$$= \frac{(1/RC)^2 + 4\pi^2 u^2 - i(4/RC)\pi u}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 u^2}$$

La respuesta de fase es

$$\angle H(u) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(u)\}}{\mathrm{Re}\{H(u)\}}\right) = \arctan\left(\frac{-(4/RC)\pi u}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 u^2}\right) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(b) El gráfico de la respuesta de magnitud y fase, para el caso $R = C = 1$ y usando la función angle de Julia es:



→ **2 pts.**

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

(c) De acuerdo a lo expuesto anteriormente, el filtro es un pasa-todo → **1 pt.**

(d) Si la entrada es una sinusoide de $\frac{4}{RC}$, entonces

$$H(\frac{4}{RC}) = \frac{1/RC - i2\pi 4/RC}{1/RC + i2\pi 4/RC} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

por lo que la salida será

$$V_{\text{out}}(t) = |H(\frac{4}{RC})| \cos\left(2\pi \frac{4}{RC} t + \angle H(\frac{4}{RC})\right) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

es decir

$$V_{\text{out}}(t) = \cos\left(2\pi \frac{4}{RC} t + \arctan\left(\frac{-(4/RC)^2\pi}{(1/RC)^2 + 4\pi^2(4/RC)^2}\right)\right) \rightarrow \textbf{3 pts.}$$

3. (12 pts.) **IDFT**. Considere la secuencia $\tilde{F}[k] = [\underline{a+b}, a+bi, a-b, a-bi, a+b, a+bi, a-b, a-bi]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) (6 pts.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ en función de a y b.
   (b) (1 pto.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ para el caso $a = 1, b = 1$.
   (c) (1 pto.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ para el caso $a = 1, b = 0$.
   (d) (1 pto.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ para el caso $a = 0, b = 1$.
   (e) (1 pto.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ para el caso $a = 1, b = -1$.
   (f) (1 pto.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ para el caso $a = -1, b = 1$.
   (g) (1 pto.) Determine la DFT inversa $\tilde{f}[n]$ para el caso $a = -1, b = -1$.

Solución

(a) Observamos que

$$\text{DFT}\{[a, b]\} = \frac{1}{2}[a+b, a-b] \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

Acolchando,

$$\text{DFT}\{[a, 0, 0, b]\} = \frac{1}{4}[a+b, a+bi, a-b, a-bi] \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

porque acolchar es interpolar en el círculo unitario en el dominio de Fourier. Este resultado también es simple de obtener usando la matriz DFT para $N = 4$.

Si ahora intercalamos ceros,

$$\text{DFT}\{[a, 0, 0, 0, 0, 0, b, 0]\} = \frac{1}{8}[a+b, a+bi, a-b, a-bi, a+b, a+bi, a-b, a-bi] \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

la cual es la secuencia a la cual se nos pide calcular la inversa.

Entonces es evidente que

$$\tilde{f}[n] = 8 \times [a, 0, 0, 0, 0, 0, b, 0]\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Las siguientes partes son realmente un regalo de puntos (cyber day!!!):

(b)
$$\tilde{f}[n] = 8 \times [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]\} = [8, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c)
$$\tilde{f}[n] = 8 \times [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]\} = [8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(d)
$$\tilde{f}[n] = 8 \times [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]\} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(e)
$$\tilde{f}[n] = 8 \times [1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0]\} = [8, 0, 0, 0, 0, 0, -8, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(f)
$$\tilde{f}[n] = 8 \times [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]\} = [-8, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(g)
$$\tilde{f}[n] = 8 \times [-1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0]\} = [-8, 0, 0, 0, 0, 0, -8, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

4. (12 pts.) **Estados discretos**. Considere la siguiente formulación en variables de estado discretas del sistema $f[n] \rightarrow g[n]$.

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f[n]$$

$$g[n] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix}$$

(a) (6 pts.) Determine la ecuación de diferencias que describe el sistema.

(b) (1 pto.) Dibuje un diagrama de bloques para el sistema, indicando las variables de estado v_1, v_2, v_3.

(c) (5 pts.) Determine un sistema FIR que produzca los primeros cuatro coeficientes de la respuesta al impulso del sistema formulado en estado.

Solución

(a) Las ecuaciones de estado son

$$v_1[n+1] = v_2[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$v_2[n+1] = v_3[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$v_3[n+1] = \frac{v_2[n]}{6} - \frac{v_3[n]}{6} + f[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$g[n] = \frac{4}{3} v_1[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces

$$g[n] = \frac{4}{3} v_2[n-1] = \frac{4}{3} v_3[n-2]$$

Además,

$$v_3[n+1] = \frac{v_1[n+1]}{6} - \frac{v_2[n+1]}{6} + f[n] = \frac{3}{4}\frac{g[n+1]}{6} - \frac{v_1[n+2]}{6} + f[n]$$

$$= \frac{3}{4}\frac{g[n+1]}{6} - \frac{3}{4}\frac{g[n+2]}{6} + f[n]$$

por lo que

$$\frac{3}{4} g[n+3] - \frac{3}{4}\frac{g[n+1]}{6} + \frac{3}{4}\frac{g[n+2]}{6} = f[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

o bien

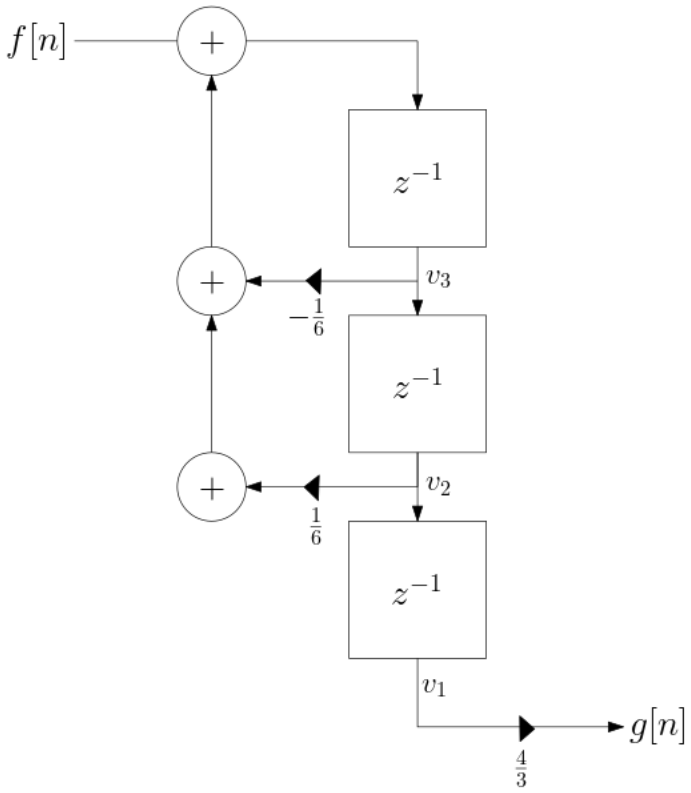
$$6g[n+3] + g[n+2] - g[n+1] = 8f[n]$$

o lo que es lo mismo

$$g[n] + \frac{1}{6} g[n-1] - \frac{1}{6} g[n-2] = \frac{4}{3} f[n-3] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) El diagrama de bloques es:

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...



→ **1 pt.**

(c) Procedemos por recursión, asumiendo reposo inicial y $f[n] = \delta[n]$:

Para $n = 0$:

$$g[0] = -\frac{1}{6}g[-1] + \frac{1}{6}g[-2] + \frac{4}{3}\delta[-3] \Rightarrow g[0] = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para $n = 1$:

$$g[1] = -\frac{1}{6}g[0] + \frac{1}{6}g[-1] + \frac{4}{3}\delta[-2] \Rightarrow g[1] = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para $n = 2$:

$$g[2] = -\frac{1}{6}g[1] + \frac{1}{6}g[0] + \frac{4}{3}\delta[-1] \Rightarrow g[2] = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para $n = 3$:

$$g[3] = -\frac{1}{6}g[2] + \frac{1}{6}g[1] + \frac{4}{3}\delta[0] \Rightarrow g[3] = \frac{4}{3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces el filtro FIR es

$$g[n] = \frac{4}{3} f[n-3] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

5. (12 pts.) **Cuantizadores**. Considere las señales:

$$f(t) = [t]\sqcap(t), \quad g(t) = a^{[t]}\sqcap(t)$$

donde $a > 0$ y $[t]$ denota el mayor número entero menor o igual a t. Este tipo de señales representan cuantizadores, por ejemplo los utilizados al interior de convertidores análogo a digital (ADC).

(a) (2 pts.) Grafique la señal $f(t)$.

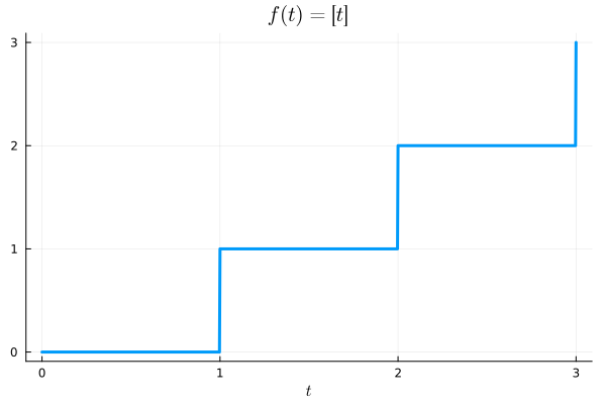
(b) (2 pts.) Grafique la señal $g(t)$ para $a = 2$.

(c) (4 pts.) Determine la Transformada unilateral de Laplace de $f(t)$.

(d) (4 pts.) Determine la Transformada unilateral de Laplace de $g(t)$.

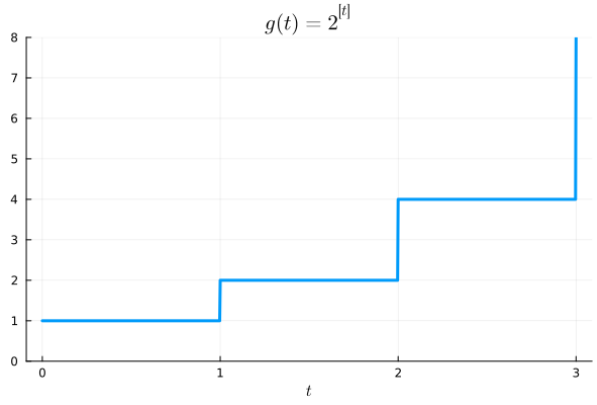
Solución

(a) El gráfico de $f(t)$ es:



$\rightarrow$ **2 pts.**

(b) El gráfico de $g(t)$ es:



La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

→ **2 pts.**

(c) Vemos que

$$f(t) = \sqcap(t-1) + \sqcap(t-2) + \sqcap(t-3) + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo que su Transformada de Laplace está dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sqcap(t-1)\} + \mathcal{L}\{\sqcap(t-2)\} + \mathcal{L}\{\sqcap(t-3)\} + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

aplicando la propiedad del desplazamiento en el tiempo:

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \ldots\right) = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} = \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{(1-e^{-s})} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(d) Vemos que

$$g(t) = a^0\sqcap(t) + (a^1 - a^0)\sqcap(t-1) + (a^2 - a^1)\sqcap(t-2) + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo que su Transformada de Laplace está dada por

$$F(s) = (a^0)\mathcal{L}\{\sqcap(t)\} + (a^1 - a^0)\mathcal{L}\{\sqcap(t-1)\} + (a^2 - a^1)\mathcal{L}\{\sqcap(t-2)\} + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

aplicando la propiedad del desplazamiento en el tiempo:

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(1 + (a^1 - a^0)e^{-s} + (a^2 - a^1)e^{-2s} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a^n - a^{n-1})e^{-sn}\right) = \frac{1}{s}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n(1 - \frac{1}{a})e^{-sn}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 + (1 - \frac{1}{a})\sum_{n=1}^{\infty}(ae^{-s})^n\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 + (1 - \frac{1}{a})\frac{ae^{-s}}{(1-ae^{-s})}\right) = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{(1-ae^{-s})} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$