Interrogación 3

◁ *Lunes 02 de noviembre, 2009 ⊗ 18:00-19:30* ▷

1. Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, obtenga las siguientes transformadas en términos de $F(\omega)$:
   (a) $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}$
   (b) $\mathcal{F}\{f(t/\alpha)\}$
   (c) $\mathcal{F}\{\text{sinc}(2t) \star \text{sinc}(-2t-3)\}$
   (d) $\mathcal{F}\{u(t)\}$
   (e) $\mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\}$

2. Para el sistema de la figura 1:
   (a) Encuentre la función de transferencia.
   (b) Si se aplica la señal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, ¿cuales serán los coeficientes de la serie de Fourier de la señal de salida $y(t)$?
   (c) Si la señal de entrada es un impulso de Dirac, es decir $x(t) = \delta(t)$, ¿cuál será el espectro de amplitud y fase de $y(t)$?
   (d) ¿Cuál es la energía de la señal $y(t)$ cuando se aplica un pulso unitario $x(t) = p(t/\tau)$ y qué porcentaje de la energía aplicada al sistema es absorbida por el mismo? Asuma $\Delta T = 1$, $\tau = 2$. *Deje expresadas aquellas expresiones que no puedan evaluarse en forma cerrada.*

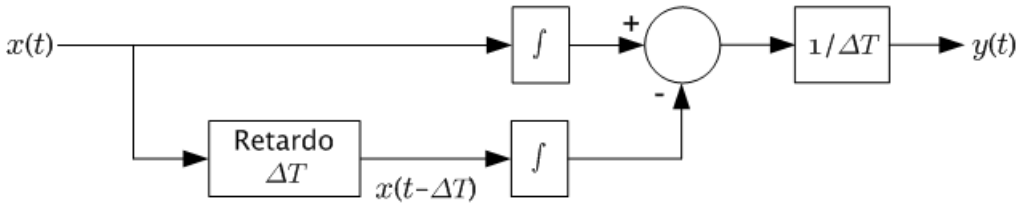


Figura 1: Sistema del problema 2.

3. Las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ de la figura 2 se modulan mediante el sistema de la figura 3 y se transmiten por un canal ideal (con respuesta al impulso $h(t) = \delta(t)$) El receptor a su vez demodula las señales con un demodulador coherente.
   (a) Si el modulador/demodulador emplean como portadora la señal $m_1(t) = \cos(\omega_i t)$, $i = 1, 2$, $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 12$, ¿cuál será el espectro de frecuencias de la señal y_t?
   (b) Usando los datos del punto anterior, ¿que filtros serán necesarios para que y_1 e y_2 contengan x_1 y x_2 por separado?
   (c) Si el modulador/demodulador emplean como portadora la señal $m_i(t) = \delta_{Ti}(t)$, $i = 1, 2$, ¿cuál será el espectro de las señales y_t, y_2 e y_3, si $T_1 = 2\pi$, $T_2 = 4\pi$? Use los filtros del punto anterior.
   (d) Si el modulador emplea como portadora $m_i(t) = \cos(\omega_i t)$, $i = 1, 2$, pero el demodulador emplea $m(t) = cos(\omega_i t - \phi_i)$, $i = 1, 2$, donde $0 < \phi_i < \pi$, $i = 1, 2$ es el desfase entre el modulador y el demodulador, ¿cuál será el espectro de las señales y_1, y_2?, ¿es posible recuperar el mensaje original?
   (e) Si el modulador emplea como portadora $m_i(t) = \cos(\omega_i t)$, $i = 1, 2$, pero el demodulador emplea $m_i(t) = \delta_{Ti}(t)$, $i = 1, 2$, ¿cuál será el espectro de las señales y_1, y_2 e y_3?, ¿es posible recuperar el mensaje original?

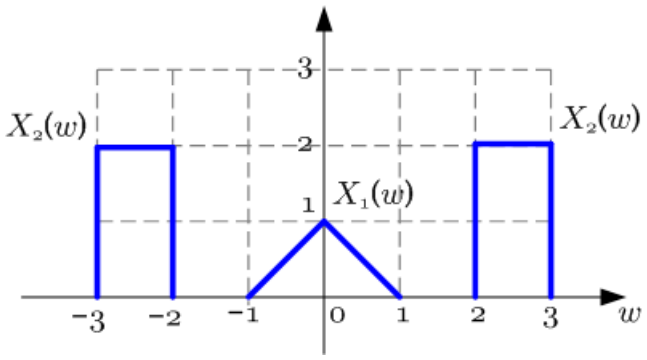


Figura 2: Señales del problema 3.

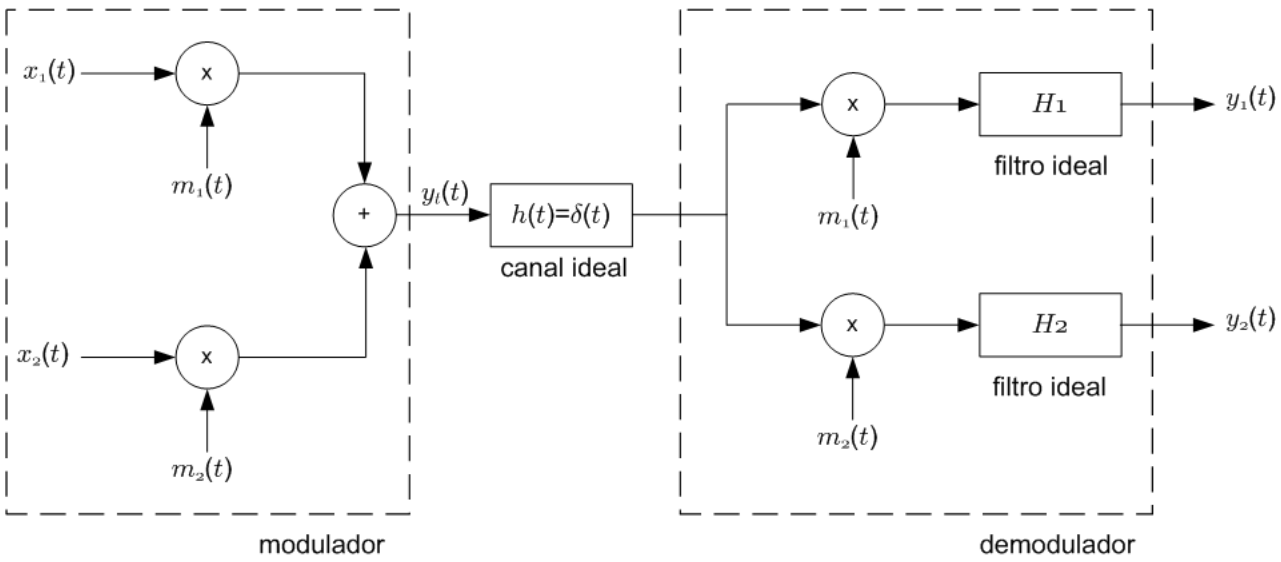


Figura 3: Sistema del problema 3.

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

NOMBRE:

4. Solución Pregunta 4

Pauta Interrogación 3

◁ *Lunes 2 de noviembre, 2009 ⊗ 18:00-19:30* ▷

1. 1.2 ptos. por ítem (ver desarrollo adjunto).

2. (a) (1.5 ptos) La salida del integrador superior es:

$$X(\omega)\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

La salida del integrador inferior es similar, pero con el retardo:

$$e^{-j\omega\Delta T}X(\omega)\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

La salida del sistema será la diferencia de las expresiones anteriores ponderadas por $1/\Delta T$:

$$Y(\omega)=\frac{1}{\Delta T}\left[1-e^{-j\omega\Delta T}\right]X(\omega)\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

Luego

$$F(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{\Delta T}\left[1-e^{-j\omega\Delta T}\right]\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

(b) (1.5 ptos) Como $y(t)=h\star x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau\stackrel{\mathcal{F}}{\to}Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$ y dado que $X(\omega)=\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\}=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$ entonces:

$$Y(\omega)=H(\omega_0)\pi\delta(\omega-\omega_0)+H(-\omega_0)\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

Como $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$, se tiene al aplicar $\mathcal{F}^{-1}$:

$$y(t)=\frac{1}{2}H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 t}$$

Luego los coeficientes de la serie de Fourier son cero excepto:

$$c_n^y=\frac{1}{2}H(n\omega_0),\quad n=-1,1$$

(c) (1.5 ptos) Si $x(t)=\delta(t)\Rightarrow X(\omega)=1$, entonces:

$$Y(\omega)=\frac{1}{\Delta T}\left[1-e^{-j\omega\Delta T}\right]\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

donde

$$\begin{aligned}|Y(\omega)| &= \frac{1}{|\omega\Delta T|}\sqrt{(1-\cos(\omega\Delta T))^2+\sin^2(\omega\Delta T)}\sqrt{1+\pi^2\omega^2\delta^2(\omega)}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{|\omega\Delta T|}\sqrt{(1-\cos(\omega\Delta T)}\sqrt{1+\pi^2\omega^2\delta^2(\omega)}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{|\omega\Delta T|}\sqrt{(1-\cos(\omega\Delta T)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\angle Y(\omega) &= \angle\left[1-e^{-j\omega\Delta T}\right]-\frac{\pi}{2}\\ &= \operatorname{atan}\left(\frac{\sin(\omega\Delta T)}{1-\cos(\omega\Delta T)}\right)-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Luego los espectros de amplitud y fase tienen la forma mostra en la fig. 1.

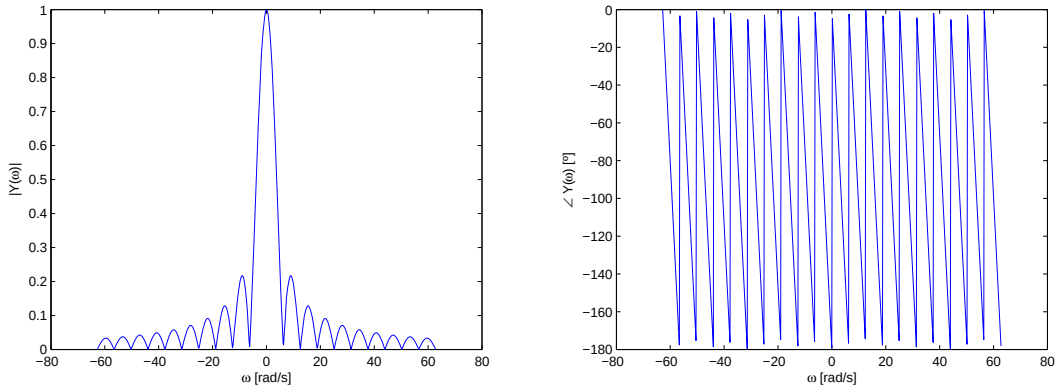


Figura 1: Espectros de amplitud y fase para el sistema del problema 2.

(d) (1.5 ptos) Al aplicar un pulso unitario $x(t) = p(t/\tau) \Rightarrow X(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)$, la energía a la salida con $\Delta T = 1$, $\tau = 1$ estará dada por:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\omega^2}(1-\cos(\omega))\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega$$

Recordando que $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$:

$$E_y = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^3}\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega$$

Utilizando la propiedad $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin^3(x)}{x^3}d\omega = \frac{3\pi}{4}$:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\omega}\right)^3\sin^3\left(\frac{\omega}{2}\right)d\omega \overset{x=\frac{\omega}{2}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^3}dx = \frac{3}{4}$$

Finalmente, la energía de la señal de entra es $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = 1$. Luego el porcentaje de energía absorbida es:

$$\%E_{absorbida} = \frac{E_x - E_y}{E_x} = \frac{1-\frac{3}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

■

Si $\tau = 2$, el procedimiento es similar. En este caso:

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\omega^3}(1-\cos(\omega))\sin(\omega)d\omega = 1$$

Mientras que $E_x = 2$, y por lo tanto:

$$\%E_{absorbida} = \frac{E_x - E_y}{E_x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

■

3. Ver gráficos...

(a) (1.2 ptos) Ver fig. 2.

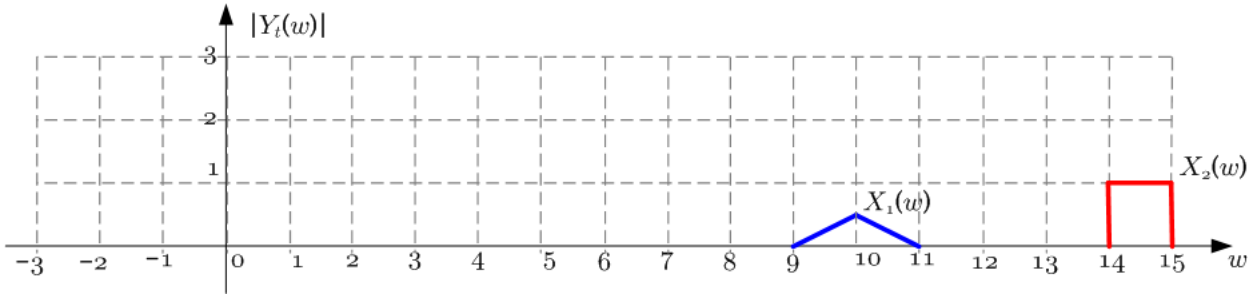


Figura 2: Espectro de amplitud de $|Y_t(\omega)|$ para el problema 3.a.

(b) (1.2 ptos) Como puede verse en la fig. 3, con un filtro pasabajo ideal $H_1(\omega) = 1$, $|\omega| \leq 1$, $H_1(\omega) = 0$, $|\omega| > 1$, puede recuperarse $x_1(t)$. Sin embargo, debido al traslape de $Y_1(\omega)$ con $Y_2(\omega)$ no existe un filtro que pueda recuperar $x_2(t)$ bajo el esquema de conexiones del sistema en el problema.

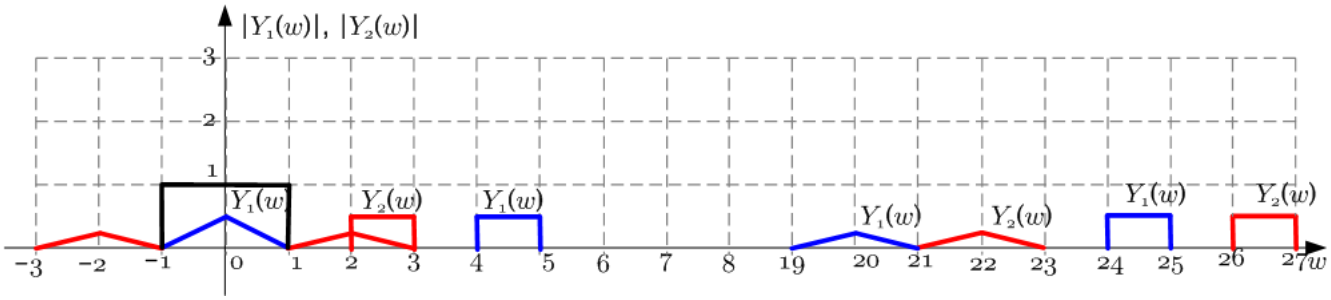


Figura 3: Espectro de amplitud $|Y_1(\omega)|$ y $|Y_2(\omega)|$ para el problema 3.b.

(c) (1.2 ptos) Ver fig.4

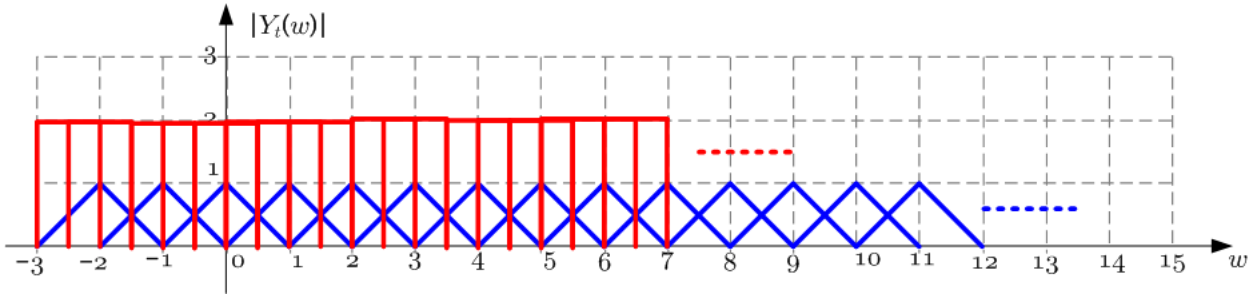


Figura 4: Espectro de amplitud de $|Y_t(\omega)|$ para el problema 3.c.

(d) (1.2 ptos) Nuevamente se repite el caso b. Ahora la diferencia está en que la demodulación tiene un retardo que en frecuencia aparece como $e^{-j\phi_i\omega}$. Este retardo no afecta la amplitud del espectro, pues $|e^{j\theta}| = 1$, pero retrasa la fase de la señal recibida en ϕ_i, porque $\angle e^{j\theta} = \theta$.

(e) (1.2 ptos) En este caso la demodulación con el tren de impulsos genera una réplica periódica del espectro de $Y_t(\omega)$ espaciados en 2π y 4π, resultante en un traslape de las componentes $X_1(\omega)$ y $X_2(\omega)$ en $Y_t(\omega)$ que no permite recuperar $x_1(t)$ ni $x_2(t)$.