IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 6D: Transformada de Fourier Discreta Propiedades

6.4.3 Propiedades de la DFT

$$\tilde{f}[n] \longrightarrow \tilde{F}[k] \qquad \tilde{g}[n] \longrightarrow \tilde{G}[k]$$

1. Dualidad $\quad \mathrm{DFT}\{\mathrm{DFT}\{\tilde{f}[n]\}\} = \frac{1}{N}\tilde{f}[-n]$

2. Conjugado $\quad \tilde{f}^*[n] \longrightarrow \tilde{F}^*[-k]$

3. Inverso $\quad \tilde{f}[-n] \longrightarrow \tilde{F}[-k]$

4. Superposición $\quad \tilde{f}[n] + \tilde{g}[n] \longrightarrow \tilde{F}[k] + \tilde{G}[k]$

con igual periodo

6.4.3 Propiedades de la DFT

5. Desplazamiento $\tilde{f}[n-a] \longrightarrow e^{-i2\pi ka/N}\tilde{F}[k]$

con a entero

6. Operador diferencial

$$\Delta_a \tilde{f}[n] = \tilde{f}[n] - \tilde{f}[n-a] \longrightarrow (1 - e^{-i2\pi ka/N})\tilde{F}[k]$$

con a entero, y notando que

$$[n-a] = (n-a) \mathrm{mod} N$$

6.4.3 Propiedades de la DFT

7. Suma

$$\sum_{j=0}^{n} \tilde{f}[j] \longrightarrow \frac{\tilde{F}[k] - \tilde{F}[0]}{1 - e^{-i2\pi k/N}} \quad \text{para } k \neq 0.$$

El valor en 0 es simplemente

$$\tilde{F}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n} \tilde{f}[j]$$

6.4.3 Propiedades de la DFT

8. Convolución periódica (cíclica o circular)

$$\tilde{f}[n] * \tilde{g}[n] \longrightarrow N\tilde{F}[k]\tilde{G}[k]$$

9. Producto $\tilde{f}[n]\tilde{g}[n] \longrightarrow \tilde{F}[k] * \tilde{G}[k]$

Señales del mismo periodo

6.4.3 Propiedades de la DFT

10. Área

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] = N\tilde{F}[0]$$

11. Valor central

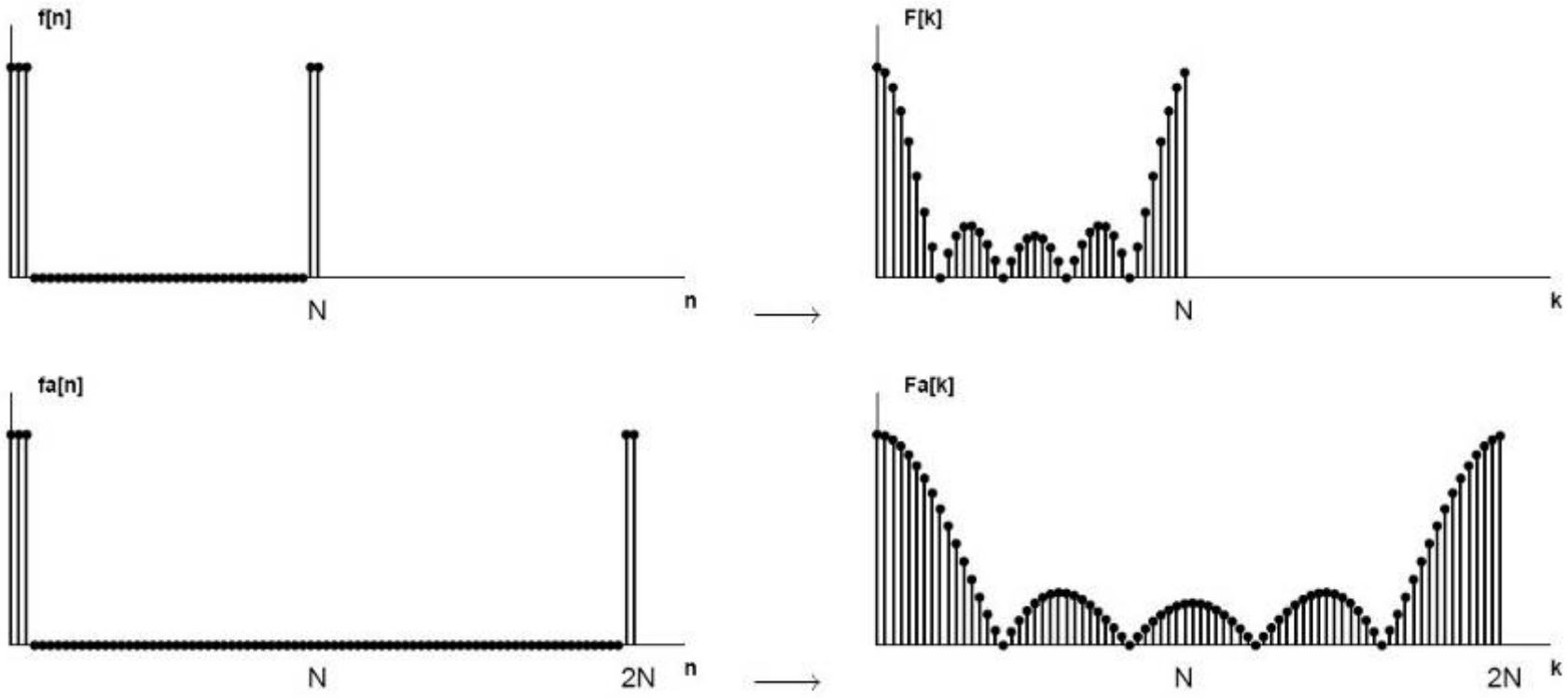
$$\tilde{f}[0] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k]$$

12. Rayleigh o Energía

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{f}[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{F}[k]|^2$$

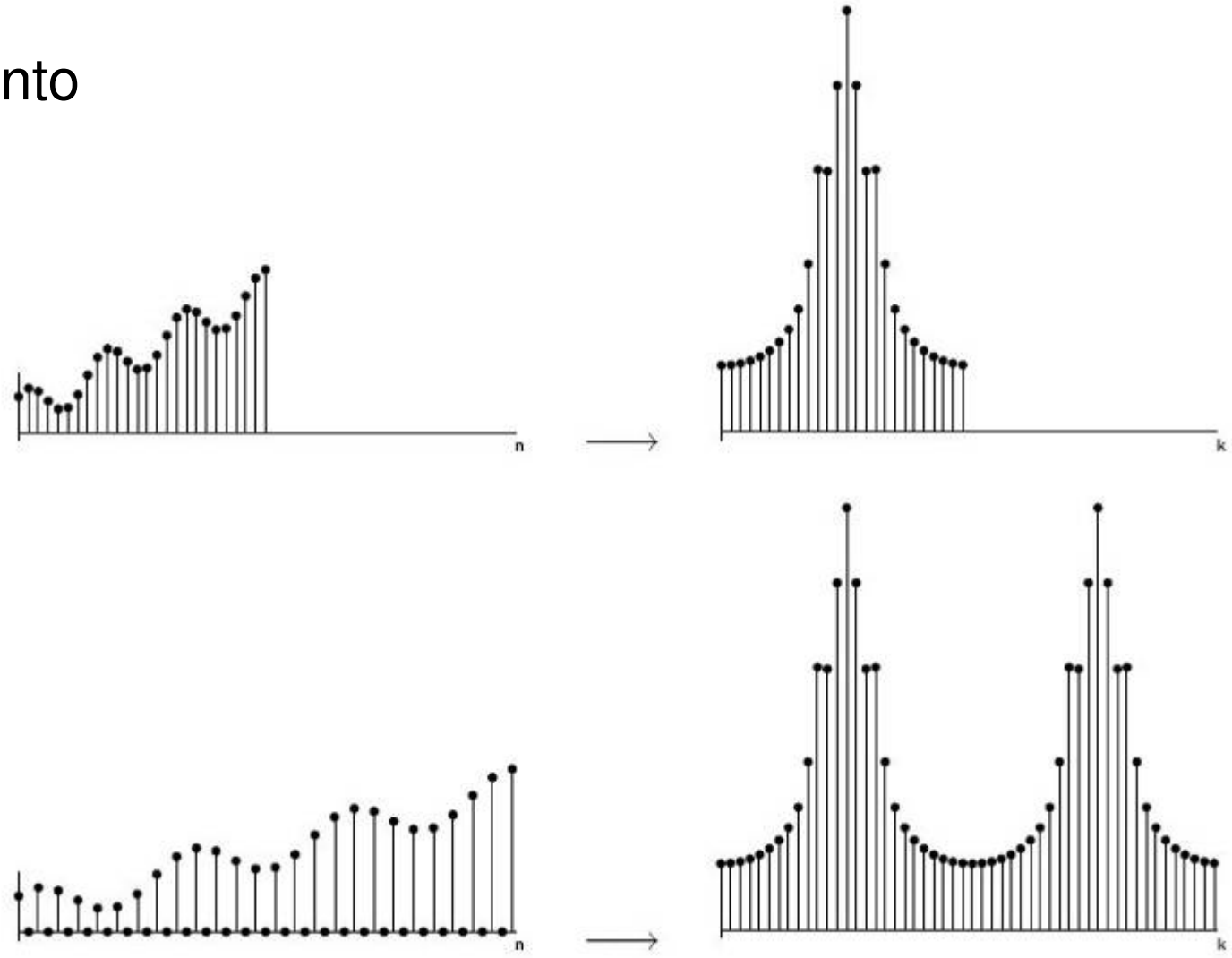
6.4.3 Propiedades de la DFT

13. Acolchamiento



6.4.3 Propiedades de la DFT

14. Estiramiento



6.5 Convolución lineal versus cíclica

Respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante:

$$h[n] = (h_0, h_1, h_2, ..., h_{P-1})$$

Entrada:

$$x[n] = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{L-1})$$

Salida:

$$y[n] = x[n] *_l h[n] = (y_0, y_1, y_2, ..., y_{L+P-2})$$

6.5 Convolución lineal versus cíclica

pero

$$\tilde{x}[n] * \tilde{h}[n] \longrightarrow N\tilde{X}[k]\tilde{H}[k]$$

necesitamos conectar la convolución lineal con la cíclica, para aprovechar la DFT.

¡Acolchar con ceros!

6.5 Convolución lineal versus cíclica

Si $\tilde{x}[n] = (a, b, c, d) \longrightarrow \tilde{X}[k] = (A, B, C, D)$,

$\tilde{h}[n] = (a', b', c', d') \longrightarrow \tilde{H}[k] = (A', B', C', D')$

$$\tilde{x}[n] = (a, b, 0, 0, 0, 0, c, d)$$

$$\tilde{h}[n] = (a', b', 0, 0, 0, 0, c', d')$$

6.5 Convolución lineal versus cíclica

$$\tilde{x}[n] \longrightarrow \frac{1}{2}(A, \alpha, B, \beta, C, \gamma, D, \delta)$$

$$\tilde{h}[n] \longrightarrow \frac{1}{2}(A', \alpha', B', \beta', C', \gamma', D', \delta')$$

$$\tilde{y}[n] \longrightarrow \frac{1}{4}(AA', \alpha\alpha', BB', \beta\beta', CC', \gamma\gamma', DD', \delta\delta')$$