Prueba 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y otros apuntes.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja.
- No se olvide de colocar su nombre en todas las hojas, ¡hágalo ahora!

---

1. [12 ptos] **Convolución discreta.**

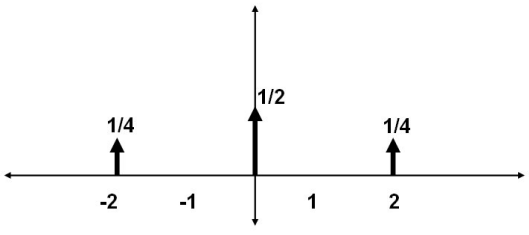
   Sea
   $$f[n] = (1,\ -1,\ 1,\ -1) \qquad g[n] = \frac{1}{2}(1,\ 1) \qquad p[n] = (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$$
   Encuentre
   $$\{f[n] *_l g[n]\} * p[n]$$

   Resultado:
   $$f[n] *_l g[n] = (1,\ -1,\ 1,\ -1) *_l \frac{1}{2}(1,\ 1) = (1/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1/2)$$
   y
   $$(1/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1/2) * (1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) = (0,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ -1/2)$$

2. [12 ptos] **Laplace inversa I.**

   Encuentre y grafique la transformada de Laplace inversa de
   $$F(s) = \cosh^2(s) \qquad \forall\sigma$$

   Resultado: Comenzando de un par conocido
   $$\uparrow\uparrow(t) \longrightarrow \cosh(s/2)$$
   $$\frac{1}{2} \uparrow\uparrow(t/2) \longrightarrow \cosh(s)$$
   $$\frac{1}{2} \uparrow\uparrow(t/2) * \frac{1}{2} \uparrow\uparrow(t/2) \longrightarrow \cosh^2(s)$$
   Nótese que $\frac{1}{2} \uparrow\uparrow(t/2) = \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)$ que convolucionada consigo mismo es
   $$\frac{1}{2} \uparrow\uparrow(t/2) * \frac{1}{2} \uparrow\uparrow(t/2) = \frac{1}{4}\delta(t-2) + \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4}\delta(t+2)$$



3. [4 ptos] **Laplace inversa II.**

   Encuentre la transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{2s^2 + 10s + 13}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12} \qquad \sigma > -2$$

   Resultado: Emplearemos fracciones parciales, para lo cual necesitamos las raíces. Un polo en $s = -2$, nos indica que $(s + 2)$ es un factor del denominador.

$$s^3 + 7s^2 + 16s + 12 = (s + 2)(s^2 + 5s + 6) = (s + 2)^2(s + 3)$$

   por lo que

$$F(s) = \frac{2s^2 + 10s + 13}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12} = \frac{2s^2 + 10s + 13}{(s + 2)^2(s + 3)} = \frac{A_0}{s + 2} + \frac{A_1}{(s + 2)^2} + \frac{B}{s + 3}$$

   de donde $A_0 = 1$, $A_1 = 1$ y $B = 1$, es decir,

$$F(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s + 3}$$

   y la transformada inversa es

$$f(t) = e^{-2t}\sqcap(t) + te^{-2t}\sqcap(t) + e^{-3t}\sqcap(t)$$

   Nótese que las funciones son causales porque la región de convergencia es el semiplano derecho.

4. [4 ptos] **Enrredo de transformadas.**

   Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i2\pi nx} \quad \text{y} \quad f'(x) \longrightarrow F(u)$$

   Encuentre la transformada de Laplace de $F(t)$. No olvide encontrar la región de convergencia. Es decir, encuentre la transformada de Laplace de la transformada de Fourier de la derivada de $f(x)$. Para que su resultado quede expresado en forma cerrada (sin sumatoria) se recomienda usar alguna de las siguientes sumas de series infinitas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1 - x)^2} \qquad |x| < 1$$

   Resultado: La transformada de Fourier es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i2\pi nx} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \delta(u - n)$$

   y de la derivada

$$f'(x) \longrightarrow F(u) = i2\pi \sum_{n=0}^{\infty} u\delta(u - n)$$

Entonces, necesitamos encontrar la transformada de Laplace de (u se puede reemplazar por n porque el delta solo tiene valor en esa posición):

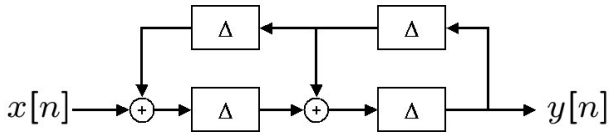
$$F(t) = i2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n\delta(t-n)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= i2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-ns} \\ &= i2\pi \frac{e^{-s}}{(1-e^{-s})^2} \end{aligned}$$

con $|e^{-s}| < 1$, es decir $e^{-\sigma} < 1$ o $\sigma > 0$.

5. [4 ptos] **Sistema discreto.**

   La figura representa un sistema discreto de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Cada bloque marcado con Δ representa un retardo de una unidad. Encuentre la respuesta al impulso del sistema. ¿Es el sistema estable?



   Resultado: La ecuación que describe este sistema es

$$y[n] = y[n-2] + y[n-4] + x[n-2]$$

   Esta ecuación se puede obtener por inspección si se repara en que el cámino entre la entrada y la salida involucra dos retardos, de ahí $x[n-2]$; adicionalmente hay dos loops de realimentación, uno de dos retardos y otro de cuatro retardos. La respuesta al impulso se puede encontrar exhaustivamente como se indica en la siguiente tabla:

n	x	y
-1	0	0
0	1	0
1	0	0
2	0	1
3	0	0
4	0	1
5	0	0
6	0	2
7	0	0
8	0	3
9	0	0
10	0	5
⋮		

Es decir la respueta al impulso son los números de Fibonacci para las muestras pares y cero para las muestras impares. El sistema es claramente inestable porque la respueta al impulso crece indefinidamente.

6. [4 ptos] **SSB-AM.**

Encuentre y grafique el espectro (transformada de Fourier) de la siguiente señal AM. La señal moduladora es $f(t)$ real, cuya transforma de Fourier es $F(u)$, conocida; y la portadora es $cos(2\pi u_c t)$. La señal AM es $f_a(t)cos(2\pi u_c t)$ donde $f_a(t)$ es la "señal analítica" de $f(t)$, definida por

$$f_a(t) = f(t) - i\hat{f}(t)$$

donde $\hat{f}(t)$ es la transformada de Hilbert de $f(t)$:

$$\hat{f}(t) = -\frac{1}{\pi t} * f(t)$$

OPCIONAL: Adivine qué significa SSB.

Resultado: El espectro pedido es

$$\begin{aligned} F_{AM}(u) &= \mathcal{F}\{f_a(t)cos(2\pi u_c t)\} \\ &= \mathcal{F}\{f_a(t)\} * \frac{1}{2u_c} \uparrow\uparrow (\frac{u}{2u_c}) \\ &= \mathcal{F}\{f(t) - i\hat{f}(t)\} * \frac{1}{2u_c} \uparrow\uparrow (\frac{u}{2u_c}) \\ &= \Big[F(u) - i\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\}\Big] * \frac{1}{2u_c} \uparrow\uparrow (\frac{u}{2u_c}) \end{aligned}$$

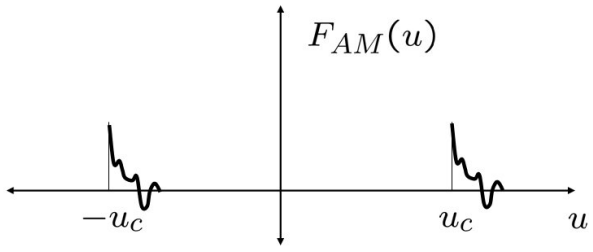
pero

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} &= \mathcal{F}\{-\frac{1}{\pi t} * f(t)\} \\ &= \mathcal{F}\{-\frac{1}{\pi t}\}F(u) \\ &= i\text{sgn}(u)F(u) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} F_{AM}(u) &= \big[F(u) - i^2\text{sgn}(u)F(u)\big] * \frac{1}{2u_c} \uparrow\uparrow (\frac{u}{2u_c}) \\ &= [(1 + \text{sgn}(u))F(u)] * \frac{1}{2u_c} \uparrow\uparrow (\frac{u}{2u_c}) \\ &= 2\sqcap(u)F(u) * \frac{1}{2u_c} \uparrow\uparrow (\frac{u}{2u_c}) \end{aligned}$$

Es decir, la señal analítica tiene el mismo espectro que la original pero con la parte negativa anulada.



Mientras $f(t)$ sea real no hay perdida de información por la simetría de la transformada de Fourier. La sigla SSB significa "Single Side Band". Una versión de esta técnica, VSB (suprimiendo la portadora), se usa en ATSC, la norma americana de televisión digital.