Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 6

21 de Abril 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

Ejercicios

1. Sea $f(t)$ una función continua cuya transformada de Fourier existe y se denota por $F(u)$. Para $\tau \in \mathbb{R}$ se define la función $\varphi(t)$ como:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + n\tau)$$

a. Determine que transformada Fourier se le podría aplicar a $\varphi(t)$ y porqué.

Se puede ver que la señan está convolucionada con un Shah, por lo que tiene que estar muestreada en frecuencia, así que se tiene que usar la serie de Fourier.

b. Calule esa transformada para $\varphi(t)$.

Se puede ver que la señan está convolucionada con un Shah, por lo que tiene que estar muestreada en frecuencia, así que se tiene que usar la serie de Fourier.

$$c_k = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} f(t + n\tau) e^{-i2\pi k \frac{t}{\tau}} dt$$

Haciendo cambio de variable con $u = t + n\tau$:

$$c_k = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f(u) e^{-i2\pi k \frac{(u-n\tau)}{\tau}} du$$

Esto se puede reordenar como:

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi k \frac{t}{\tau}} dt$$

Y es lo mismo que:

$$\varphi(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau} F(\frac{k}{\tau}) \right) e^{i2\pi k \frac{t}{\tau}}$$

2. Se define la transformada de Hilbert como:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

a. Encuentre la relación entre esta transformada y la de Fourier.

Nos damos cuenta que:

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

Al calcular Fourier:

$$Y(u) = X(u)(-i \cdot sgn(u))$$

b . Calcule la transformada de Hilbert de sinc(t).

Sabemos que :

$$\mathcal{F}^{-1}\{\sqcap(u)\} = sinc(t)$$

Por lo viston en **a.** la transformada de Hilbert será:

$$-i \cdot sgn(u) \cdot \sqcap(u) = i \left(\sqcap(\frac{u - 1/4}{1/2}) - \sqcap(\frac{u + 1/4}{1/2}) \right)$$

Esto a su vez se puede escribir como la convolución de un $\sqcap(u)$ con una antihorquilla:

$$\sqcap(2u) * (-4i \uparrow\downarrow (2u)) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{1}{2} sinc(\frac{\pi t}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{\pi t}{2}) = -\sin^2(\frac{\pi t}{1}) \frac{2}{\pi t}$$

3. Demuestre por definición que:

$$\mathcal{F}\{1(x)\} = \delta(u)$$

Ver pauta control 6

4. Determine los coeficientes de Fourier de:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{i2\pi x/T}}$$

Identificamos la serie geométrica de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{i2\pi \frac{n}{T} x}$$

Así es trivial notar que:

$$c_n = 2^{-n} \cdot u(n)$$

5. Determine la validez de:

a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x-a)}{(x-a)^2} dx = \pi$$

Sabemos que:

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Tal que:

$$\mathcal{F}\{\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\} = \sqcap(\pi u) \cdot e^{i2\pi a} \cdot \pi$$

Por Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(\frac{x-a}{\pi}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i2\pi a} \pi \sqcap(\pi u)|^2 du = \pi$$

b.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$$

Identificamos:

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+(2\pi u)^2}$$

Al aplicar definición:

$$e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi u t \frac{2}{1+(2\pi u)^2}} du$$

Dado que la parte impar será cero, es lo mismo que:

$$e^{-|t|} = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi u t) \frac{2}{1+(2\pi u)^2} du$$

Tomando $\omega = 2\pi u$:

$$e^{-|t|} = \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t)}{2\pi} \frac{4}{1+\omega^2} d\omega$$

Tal que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$$