Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 3

Entrega: 23 de octubre a las 23:59 hrs.

Instrucciones generales

1. Para la parte de implementación, debe adjuntar un código desarrollado en Python (*.ipynb*).
2. Deben entregar un PDF con el desarrollo llamado *Apellido*_Tarea3.pdf (donde *Apellido* es su apellido).
3. La tarea es individual, pero pueden comentar las preguntas con sus compañeros.
4. Cada eje de los gráfico debe incluir un nombre descriptivo y su respectiva unidad.

Ejercicios Teóricos

1. Sea un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$y'''(t) + 6y''(t) + 8y'(t) = x''(t) + 4x'(t) + 3x(t)$$

a)[**0.5 puntos**] Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

b)[**0.5 puntos**] Sin calcular $h(t)$, encuentre $\lim_{t\to\infty} h(t)$ la respuesta al impulso del sistema.

c)[**0.5 puntos**] Bosqueje el diagrama de polos y ceros del sistema.

d)[**0.5 puntos**] Calcule $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema.

Solución:

a) Tomando transformada de Laplace a ambos lados y despejando $\frac{Y(s)}{X(s)}$ se obtiene:

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 6s^2 + 8s}$$

b) Se emplea el teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+4s+3}{s^3+6s+8} = \frac{3}{8}$$

c) El sistema tiene ceros en $s=-3$ y $s=-1$ y polos en $s=0$, $s=-2$ y $s=-4$

d) Se emplean fracciones parciales.

$$H(s) = \frac{s^2+4s+3}{s(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{c}{s+4}$$

Las ecuaciones que se obtienen son:

$$3 = 8A$$
$$1 = A + B + C$$
$$4 = 6A + 4B + 2C$$

De lo que se obtiene que $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{1}{4}$ y $C = \frac{3}{8}$

Luego la inversa será:

$$h(t) = (\frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t})u(t)$$

2. **[2 puntos]** La señal $x(t) = \cos^2(2\pi \cdot 2000 \cdot t)\cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t)$ es muestreada a $F_s = 9000$ Hz y luego reconvertida a una señal analógica $y(t)$. Escriba la señal de salida $y(t)$.

Solución:

Lo primero es expresar la entrada como una suma de sinusoides de distinta frecuencia. Usando propiedades trigonométricas se puede escribir lo siguiente.

$$x(t) = (\frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi 4000t))) \cdot \cos(2\pi 1000t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi 1000t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 5000t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 3000t)$$

Luego, hay aliasing ya que $F_s = 9000$ debiera ser al menos $5000 * 2 = 10000$.

Bosquejando el espectro es posible notar que se genera una frecuencia que antes no existía en 4000Hz. Luego la señal es:

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi 1000t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 3000t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 4000t)$$

3. Suponga que tiene una piscina, y que en ella deja caer un piedra. Para caracterizar el flujo de la piscina, decide hacer un video, y se da cuenta que en este video se ven vórtices que giran en el agua. El más pequeño de estos vórtices es de 3 [mm] y además se da cuenta que el más rápido de estos vórtices da una vuelta completa en 0.05 [seg].

   - **[0.4 puntos]** Determine cuál es la frecuencia espacial mínima de muestreo del fluído.
   - **[0.4 puntos]** Determine cuál es la frecuencia temporal mínima de muestreo del fluído.
   - **[0.4 puntos]** Ahora suponga que usted debe filtrar cada *frame* del video. Al hacerlo se ven anillos que distorsionan la imagen. ¿Qué fenómeno está viendo?
   - **[0.4 puntos]** ¿Qué tipo de filtro se pudo haber usado? Justifique.
   - **[0.4 puntos]** Determine si esto afecta las frecuencias espaciales, temporales o ambas. Justifique.

   Solución:

   a)
   $$f_s \geq 2f_{max} = \frac{2}{T_{min}} = \frac{2}{3}\ [mm^{-1}]$$

   b)
   $$f_s \geq 2f_{max} = \frac{2}{T_{min}} = \frac{2}{0.05} = 40\ [Hz]$$

   c) Al generar un filtrado brusco se generan estos anillos que corresponden al fenómeno de Gibbs.

   d) Asumiendo que se tiene una señal con espectro de frecuencia inifito, si filtro usando un pasa altos, eliminaré las frecuencias bajas, pero como todos los armónicos superiores existen, se podrán sumar para que no se formen los anillos. Por otro lado si uso un pasabajos o pasa banda ideal, trunco mi espectro de frecuencia, por lo que las altas frecuencias cercanas a donde fue truncado no se podrán eliminar con armónicos superiores generando el fenómeno de Gibbs.

   e) El filtrado de cada *frame* se puede ver como un filtrado de una image, y el tiempo entre cada *frame* no se ve afectado por el filtrado. Es por esto que solamente se ven afectadas las frecuencias espaciales.

4. El teorema de Parseval relaciona los dominios de tiempo y frecuencia mediante el promedio de energía de una señal según la relación:
   $$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$
   Donde T es el período de la señal $x(t)$ y a_k los coeficientes de su serie de Fourier.

a) **[1 punto]** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier de $y(t) = |x(t)|^2$. *Hint:* $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$

b) **[1 punto]** Use el resultado previo para demostrar el teorema de Parseval.

Solución:

a)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier de $y(t)$ serán b_k:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \frac{1}{T}\int_T x(t)x^*(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{j\frac{2\pi}{T}lt} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^* e^{-j\frac{2\pi}{T}mt} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}$$

Al desarrollar se llega a:

$$b_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_l a_m^* \cdot \frac{1}{T}\int_T e^{-j\frac{2\pi}{T}(k-l+m)t}$$

$$b_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_l a_m^* \delta[k-l+m]$$

$$b_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k+m} a_m^*$$

b) Para esta pregunta es cosa de notar que:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T y(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k+m}a_m^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Ejercicios de Implementación

1. La convolución discreta lineal se define como:

$$f[n] *_l g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-m]g[m]$$

Por otro lado, la convolución cíclica se define como:

$$f[n] * g[n] = \sum_{m=0}^{Q-1} f[n-m|P]g[m]$$

donde P es el largo de la secuencia $f[n]$ y Q es el largo de la secuencia $g[n]$ $(P \geq Q)$.

a) **[1 punto]** Genere una función en *Python* que permita calcular la convolución discreta lineal entre dos señales de largo M y N, respectivamente.

b) **[1 punto]** Genere otra función en *Python* que permita calcular la convolución cíclica entre dos señales de largo P y Q, respectivamente.

c) **[1 punto]** Un sistema LTI continuo recibe como entrada $f(t) = \sqcap((t-5)/5)$. La respuesta al impulso del sistema es igual a $h(t) = (0.9)^t \sin(\pi t)u(t)$. Para conocer la salida del sistema, usted obtiene 100 muestras de la señal de entrada a una tasa de muestreo de 0.1 segundos. Además, considere que:

1) La primera muestra se toma en $t = 0$.
2) El número de muestras de $h(t)$ es libre, pero debe estar justificado.
3) Se debe justificar qué expresión de convolución se considera.

Grafique la señal discreta que se vería en la salida del sistema.

d) **[1 punto]** Grafique la salida si se hubiera elegido la otra forma de convolución. ¿Los resultados son equivalentes? De existir diferencias, explique a qué se deben.

Solución:

a) Una posible solución se presenta a continuación:

```python
def linear_conv(f1, f2):
  #largos de señales
  M = len(f1)
  N = len(f2)

  conv_l = []
  for t in range(N + M - 1):
    partial_conv = 0
    for j in range(M):
      # Operación asumiendo 0s afuera del renga de f1 y f2
      if  0 <= j < M and 0 <= t-j < N:
        partial_conv +=f1[j] * f2[t-j]

    conv_l.append(partial_conv)

return conv_l
```

Figura 1: Convolución lineal

b) Una posible solución se presenta a continuación:

```python
def circular_conv(f1, f2):

  # Se establece P y Q
  if len(f1)>= len(f2):
    P = len(f1)
    secondary_signal = f1
    Q = len(f2)
    main_signal = f2
  else:
    P = len(f2)
    secondary_signal = f2
    Q = len(f1)
    main_signal = f1

  circular_conv = []

  # Se aplica fórmula según definición
  while n <= P+Q-1:
    partial_conv = 0
    for m in range(Q):
      partial_conv += secondary_signal[(n - m)% P]* main_signal[m]
    circular_conv.append(partial_conv)
  k += 1
  return circular_conv
```

Figura 2: Convolución cíclica

c) El número de muestras de $h(t)$ debe ser suficiente como para contener gran parte de su dinámica (se debe esperar a que $h(t)$ sea cercano a 0). Un número razonable de muestras puede ser 400 (o un valor mayor), ya que $0.9^{400 \cdot 0.1} \approx 0.015$. Además, la convolución lineal es adecuado al tratarse de señales no periódicas. Luego, el resultado de la convolución entre la entrada y $h(t)$ es igual a:

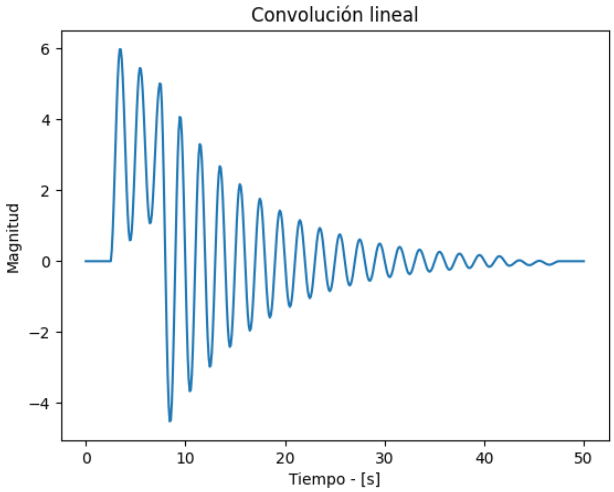


Figura 3: Convolución lineal

d) Viendo la convolución cíclica, se obtiene que:

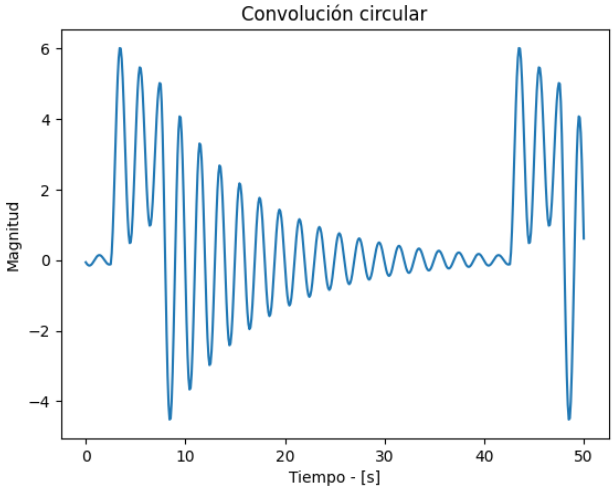


Figura 4: Convolución cíclica

La convolución cíclica entrega una señal muy parecida a la obtenida en el caso anterior. Sin embargo, en los extremos de la señal se aprecian variaciones como resultado de la periodicidad que se asume en las secuencias convolucionadas.

2. Esta pregunta tiene cómo objetivo que se familiaricen con los conceptos fundamentales de los filtros, además de poder graficar e interpretar el espectro de un filtro.

   a) **[0.5 puntos]** En el contexto del curso, ¿qué son los filtros y para qué se usan? ¿Cómo se describen?

   b) **[0.5 puntos]** Defina las siguientes características de un filtro:

   - Frecuencia de corte.
   - Banda pasante.
   - Banda rechazada.
   - Ancho de banda.

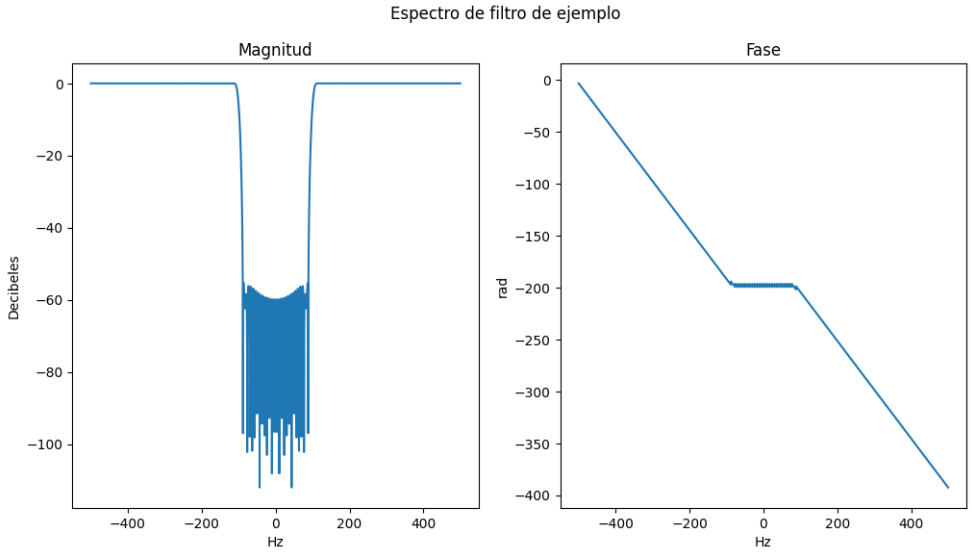
   c) **[0.5 puntos]** Para cada uno de los siguientes tipos de filtros, descríbalos según las características descritas anteriormente:

   - Filtro pasa-bajos.
   - Filtro pasa-altos.
   - Filtro pasa-banda.
   - Filtro rechaza-banda.
   - Filtro resonador.
   - Filtro notch.

d) [**0.5 puntos**] Elija tres de los filtros anteriores, y busque un ejemplo de una aplicación de este en la vida real. Para hacer esto tiene que definir su propósito e incluir una imagen de la magnitud y fase del filtro (pueden usar imágenes de una bibliografía confiable). Además, a partir del gráfico comente sobre las características del filtro (recuerden el inciso a)).

e) [**1 punto**] Escriba una función en *Python* que tome tres inputs, un *array* de numpy de la respuesta al impulso de un filtro, el periodo de muestreo y el número de puntos del *array*, y grafique la magnitud (en dB) y fase del filtro en una misma figura. Para lograr esto va a tener que tomar la DFT de la respuesta al impulso, ya que esto corresponde a la respuesta en frecuencia del filtro. Recuerden incluir la función en el .pdf y expliquen detalladamente su funcionamiento.

Si implementan correctamente la función, deberían llegar al siguiente resultado si usan la respuesta al impulso contenida en el archivo *impulse_response0.npy*:



Consideraciones adicionales

- Las cuatro respuestas al impulso incluidas en Canvas fueron muestreadas a $1000Hz$ (deberían poder concluirlo viendo la figura anterior).
- Los gráficos tienen que estar centrados en $0Hz$ (la función *fftshift* de scipy les podría servir).
- El valor máximo de la magnitud debe estar en $0dB$ (deben normalizar por el valor máximo).
- Recuerden que en el primer taller del curso vimos como graficar correctamente la fase de un *array* complejo.
- Recuerden que cuando toman la fft de una señal el resultado es un *array*, por

lo que si quieren obtener el dominio del espectro deben usar el teorema de Nyquist y NUT=1.

f) **[1 punto]** Utilice la función diseñada en el inciso anterior para caracterizar los otros tres filtros incluidos en Canvas (*impulse_response1.npy*, *impulse_response2.npy*, *impulse_response3.npy*). Incluyan las figuras generadas y comentan respecto al tipo de filtro, frecuencia/s de corte, banda pasante y banda rechazada.

Solución:

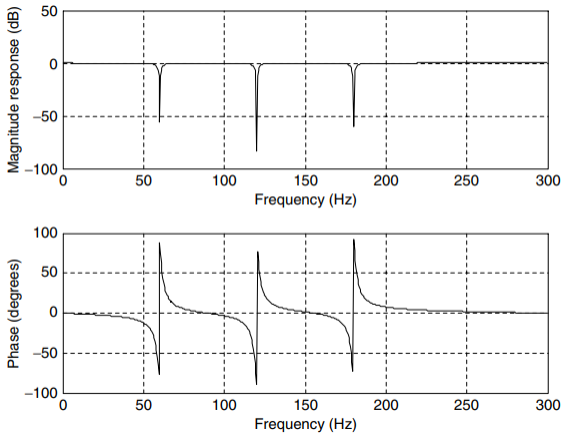
a) Los filtros son sistemas que modifican el contenido de frecuencia de una señal. Un filtro podría ser usado para eliminar ruido de cierta frecuencia, amplificar una frecuencia en específico, acondicionar una señal, entre otras aplicaciones.

Los filtros en el contexto del curso son sistemas LTI, por lo que generalmente se representan a partir de la respuesta al impulso o la función de transferencia.

b)
- **Frecuencia de corte:** La frecuencia de corte corresponde al punto en el espectro donde la amplitud de la señal comienza a disminuir. Separa la banda pasante de la rechazada.
- **Banda pasante:** La banda pasante corresponde a la parte de la respuesta en frecuencia del filtro para el cual la amplitud de la señal no cambia.
- **Banda rechazada:** La banda rechazada corresponde a la parte de la respuesta en frecuencia del filtro para el cual la señal de entrada se atenúa.
- **Ancho de banda:** El ancho de banda corresponde al largo en Hz de la banda pasante.

c)
- **Pasa-bajos:** El filtro pasa-bajos tiene una banda pasante que va desde el nivel DC hasta la frecuencia de corte (f_c). Para frecuencias mayores a f_c la señal de entrada se atenúa.
- **Pasa-altos:** El filtro pasa-altos tiene una panda rechazada que va desde el nivel DC hasta f_c. Para frecuencias mayor a f_c, la señal de entrada prácticamente no cambia.
- **Pasa-banda:** Este filtro tiene una banda pasante en un intervalo del espectro de frecuencia, y atenúa el resto de las frecuencia. La banda pasante no puede incluir el nivel *DC* o tender a frecuencia infinitas.
- **Rechaza-banda:** Este filtro tiene una banda rechazada en un intervalo del espectro de frecuencia, y deja pasar el resto de las frecuencia. La banda rechazada no puede incluir el nivel *DC* o tender a frecuencia infinitas.
- **Resonador:** Un filtro resonador ideal atenúa todas las frecuencias menos una en particular, que se mantiene de igual amplitud o se amplifica.
- **Notch:** Este filtro deja pasar todas las frecuencia menos una en particular, que se atenúa.

d) A continuación se presenta la respuesta en frecuencia de un filtro notch para eliminar el ruido de la red eléctrica en un sensor de ECG:



Notamos que el filtro atenúa tres frecuencias en particular $60Hz$, $120Hz$ y $180Hz$, mientras que el resto de las frecuencias se mantienen igual.

Se tiene que repetir esto para dos ejemplos adicionales. Si el filtro es pasa-banda, pasa-bajos o pasa-altos, se tiene que incluir frecuencias de corte y el ancho de banda.

e) A continuación se presenta la función que grafica la respuesta en frecuencia de un filtro a partir de la respuesta al impulso:

Listing 1: Magnitud y fase de un filtro a partir de la respuesta al impulso

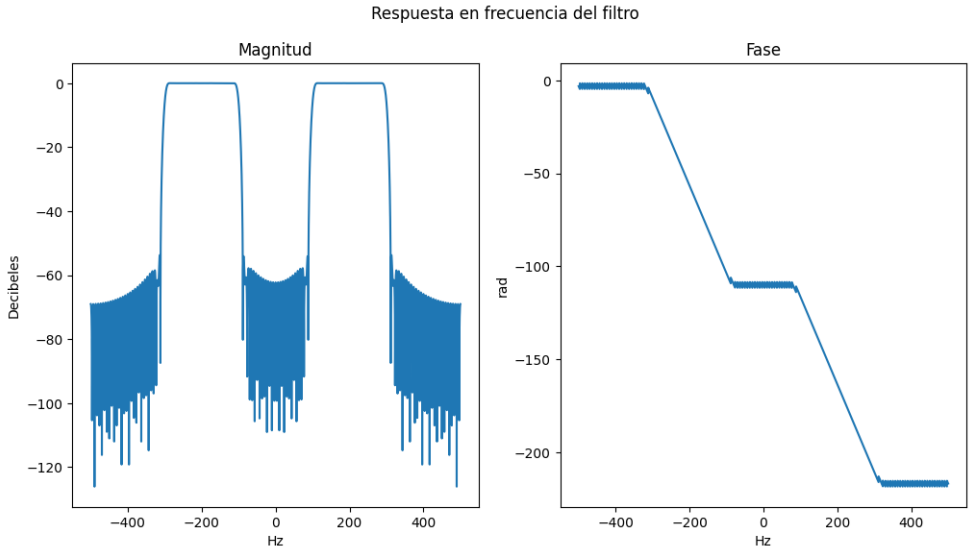
```
def h_response_spect(h,t,N):
  #Parte 1)
  spect = np.fft.fft(h)
  spect = np.fft.fftshift(spect)
  #Parte 2)
  magnitud= np.abs(spect)
  magnitud/= np.max(magnitud)
  decibeles=20*np.log10(magnitud)
  #Parte 3)
  fase=np.unwrap(np.angle(spect))
  #Parte 4)
  u = np.linspace(-0.5/t,0.5/t,num=N)
  fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2,figsize=(12,6))
  fig.suptitle('Espectro de filtro de ejemplo')
  ax1.plot(u, decibeles)
  ax2.plot(u, fase)
  ax1.set_xlabel('Hz')
```

```
ax1.set_ylabel('Decibeles')
ax1.set_title('Magnitud')
ax2.set_xlabel('Hz')
ax2.set_ylabel('rad')
ax2.set_title('Fase')
```

En la primera parte del filtro se toma la fft de la respuesta al impulso del filtro y se usa *fftshift()* para centrarla en el nivel DC. En la segunda parte de obtiene la magnitud de la respuesta en frecuencia en dB. En la tercera parte se calcula la fase del filtro. Cabe destacar que la función *unwrap()* permite que la fase ya no esté contenida entre $-\pi$ y π radiantes. Finalmente en la parte cuatro se obtiene el vector de frecuencias usando $NUT = 1$, y se grafica la magnitud y fase en una misma figura

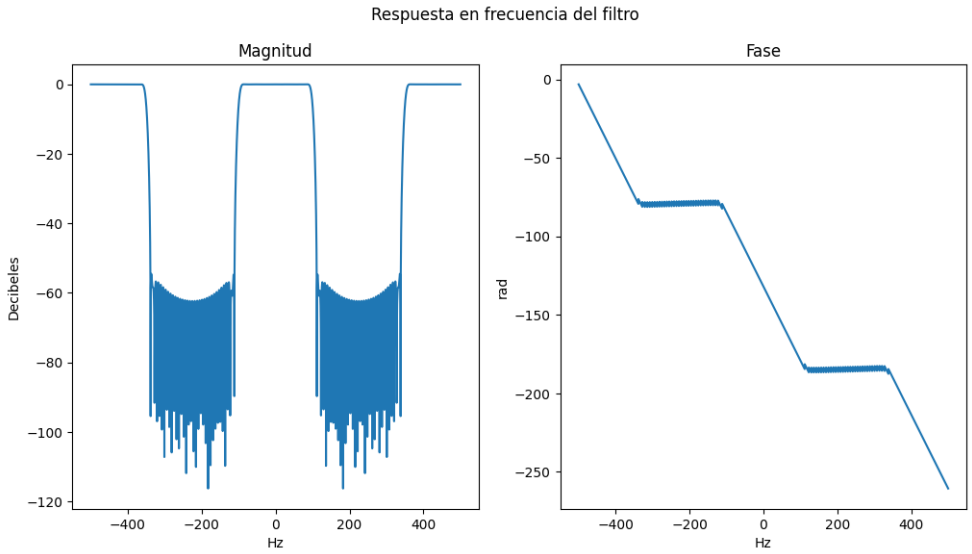
f)

- *impulse_response1.npy*: La respuesta en frecuencia del filtro se presenta a continuación:



Es posible notar que se tiene un filtro pasa-banda, que tiene frecuencias de corte en 100 y 300Hz. El ancho de banda del filtro es de 200Hz.

- *impulse_response2.npy*: La respuesta en frecuencia del filtro se presenta a continuación:



Observamos que este filtro corresponde a un rechaza-banda, que tiene frecuencias de corte en 100 y 350Hz. La banda rechazada va de 100Hz a 350Hz, mientras que hay dos bandas pasantes $[0Hz, 100Hz]$ y $[350Hz, 500Hz]$.