IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Examen

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2020
Tiempo: 2.5 hrs.
Puntos: 36
Fecha: 15/07/2020

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

1. (3 pts.) Considere el siguiente sistema definido por la ecuación:

$$g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

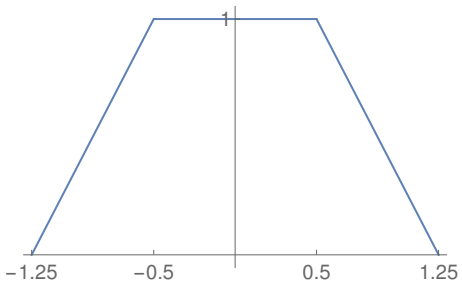
¿Es el sistema LTI? Grafique la respuesta del sistema a la entrada $f(x) = \sqcap(x)$.

Solución

Vemos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x-\xi}{2}\right) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \sqcap\left(\frac{x}{2}\right) * f(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}} \end{aligned}$$

Como la salida se puede escribir como una convolución de una respuesta al impulso con la entrada, el sistema debe ser LTI $\rightarrow$ **1 pt.** . Entonces la salida del sistema a la entrada pedida es



$\rightarrow$ **1 pt.**

2. (3 pts.) Considere una pistola que dispara una bala de masa m en el tiempo $t = 0$ a una velocidad v_0. Si la bala se dispara contra un gas viscoso, la ecuación de movimiento se puede expresar como:

Por favor mire la página siguiente ...

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = mv_0\delta$$

donde $x(t)$ denota la posición de la bala, $k > 0$ es una constante y δ es la distribución impulso. Suponga que $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Encuentre una expresión algebraica para el desplazamiento de la bala en función del tiempo.

Solución

Tomando la Transformada de Laplace de la ecuación y considerando condiciones iniciales nulas, tenemos

$$ms^2X(s) + ksX(s) = mv_0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

es decir

$$X(s) = \frac{mv_0}{ms^2 + ks} = \frac{v_0}{s(s + \frac{k}{m})} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Usando fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{mv_0/k}{s} - \frac{mv_0/k}{s + k/m}$$

cuya inversa es

$$\boxed{x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

3. (3 pts.) Un sistema LTI se denomina de fase mínima si es que tanto el sistema como su sistema inverso son sistemas causales y estables. Determine que condiciones deben cumplir los polos y los ceros de un sistema de fase mínima.

Solución

Si un sistema descrito por una función racional con ceros y polos se invierte, los polos pasan a ser los ceros del sistema inverso y los ceros pasan a ser los polos $\rightarrow$ **1 pt.** Para que ambos sistemas sean estables, tanto los polos como los ceros del sistema original deben estar al interior del circulo unitario $\rightarrow$ **1 pt.** , además esta condición asegura la causalidad de los sistemas $\rightarrow$ **1 pt.**

4. (3 pts.) Encuentre, en el sentido de las distribuciones, a qué distribución equivale la expresión

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\frac{\sqcap(x)\sin(\omega x)}{\omega}$$

donde $\sqcap(x)$ es el escalón y ω es una constante real.

Solución

Nos interesa encontrar

$$\langle\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\sqcap\sin(\omega x)}{\omega},\varphi\rangle=\langle\frac{d^2}{dx^2}\frac{\sqcap\sin(\omega x)}{\omega},\varphi\rangle+\langle\sqcap\sin(\omega x)\omega,\varphi\rangle$$

Aplicando las propiedades de las distribuciones de la derivada y la multiplicación por una función, nos queda

$$\begin{aligned}\langle\frac{\sqcap\sin(\omega x)}{\omega},\varphi''\rangle+\langle\sqcap,\sin(\omega x)\omega\varphi\rangle&=\langle\sqcap,\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi''\rangle+\langle\sqcap,\sin(\omega x)\omega\varphi\rangle\\&=\int_0^\infty\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi''(x)dx+\int_0^\infty\sin(\omega x)\omega\varphi(x)dx\rightarrow\boxed{\textbf{1 pt.}}\end{aligned}$$

Integrando por partes la primera integral:

$$=\frac{\sin(\omega x)}{w}\varphi'(x)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\cos(\omega x)\varphi'(x)dx+\omega\int_0^\infty\sin(\omega x)\varphi(x)dx$$

El primer término es cero porque φ es una función de Schwartz y $\sin(0)=0$. Integrando por partes la integral del medio:

$$=-\cos(\omega x)\varphi(x)\Big|_0^\infty-\omega\int_0^\infty\sin(\omega x)\varphi(x)dx+\omega\int_0^\infty\sin(\omega x)\varphi(x)dx\rightarrow\boxed{\textbf{1 pt.}}$$

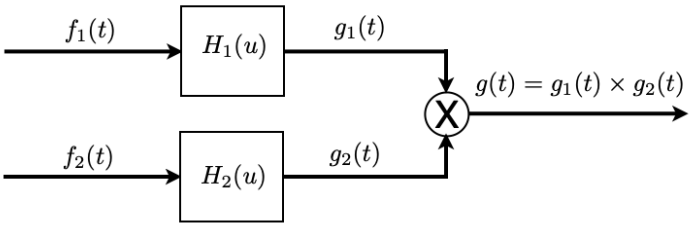
Evaluando el primer termino queda simplemente

$$\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle$$

Entonces, en el sentido de las distribuciones:

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\sqcap(x)\sin(\omega x)}{\omega}=\delta}\rightarrow\boxed{\textbf{1 pt.}}$$

5. (3 pts.) Considere un sistema compuesto por dos sub-sistemas pasa-bajos descritos por las respuestas de frecuencia $H_1(u)$ y $H_2(u)$. La salida total es la multiplicación de las salidas de ambos sub-sistemas, de acuerdo a la siguiente figura:



Suponga que las respuestas de frecuencia son

$$H_1(u) = \sqcap\left(\frac{u}{20000}\right) \text{ y } H_2(u) = \sqcap\left(\frac{u}{10000}\right)$$

Suponga además que las entradas al sistema son $f_1(t) = 10^4 \sqcap(10^4 t)$ y $f_2 = \delta$. Dibuje $G_1(u)$ y $G_1(u)$ y encuentre el ancho de banda de las señales $g_1(t), g_2(t)$ y $g(t)$.

Solución

Tomando las Transformadas de Fourier de las señales de entrada tenemos:

$$F_1(u) = \frac{10^4}{10^4}\,\text{sinc}\,(\frac{u}{10^4}) = \text{sinc}\,(\frac{u}{10000})$$

y

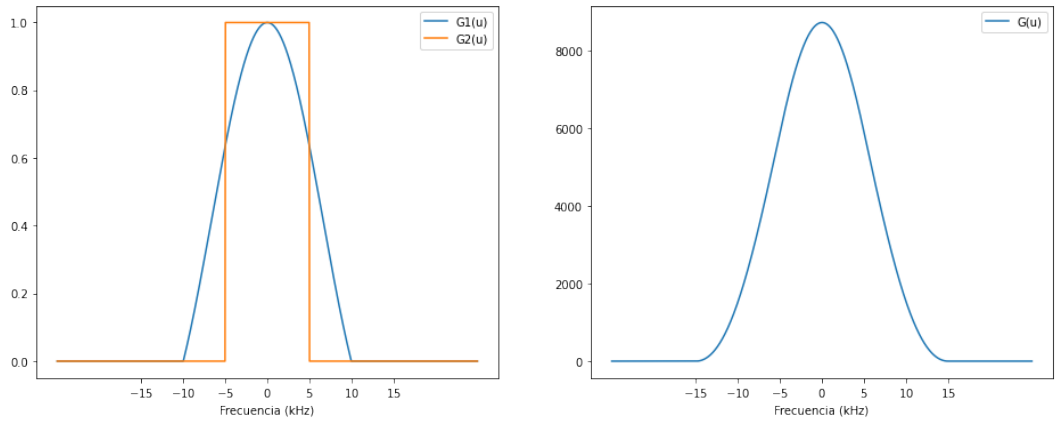
$$F_2(u) = 1$$

Entonces las salidas serán

$$G_1(u) = \text{sinc}\,(\frac{u}{10000}) \times \sqcap\left(\frac{u}{20000}\right)$$

y

$$G_2(u) = 1 \times \sqcap\left(\frac{u}{10000}\right) = \sqcap\left(\frac{u}{10000}\right)$$



→ **1 pt.**

Ambas señales se grafican arriba en la figura de la izquierda, donde se puede apreciar que las frecuencias máximas de las señales son 10 kHz y 5 kHz respectivamente → **1 pt.** Como la salida es la convolución de ambos espectros en el dominio de Fourier, la frecuencia máxima de la señal de salida es de 15 kHz, como se ve en el gráfico de la derecha → **1 pt.**

6. (3 pts.) Encuentre la Transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{1}{s(1+e^{as})},\ a > 0$$

Solución

Vemos que esta función en el dominio de Laplace tiene un polo en cero. Además tiene otros infinitos polos simples, dado que las raíces de la ecuación

$$1 + e^{as} = 0$$

son infinitas. Estas raíces son cualquier múltiplo impar de $i\pi/a$, es decir

$$s_n = \frac{2n-1}{a}\pi i,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para encontrar la inversa, utilizaremos el teorema de los residuos. Para el polo en cero

$$\text{Res}(s=0) = \lim_{s\to 0} e^{st}\frac{1}{s(1+e^{as})}s = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para los otros polos

$$\text{Res}(s=s_n) = \lim_{s\to \frac{2n-1}{a}\pi i} e^{st}\frac{1}{s(1+e^{as})}(s - \frac{2n-1}{a}\pi i)$$

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que puede resolverse mediante L'Hopital.

$$\text{Res}(s=s_n) = -\frac{e^{t\frac{2n-1}{a}\pi i}}{(2n-1)\pi i}$$

Finalmente,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2n-1}{a}\pi i t}}{(2n-1)}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2n-1}{a}\pi t)}{(2n-1)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

7. (3 pts.) Considere un sistema con función de transferencia

$$H(u) = e^{-(ku^2 + i2\pi t_0 u)}$$

¿Es este sistema causal? En caso positivo, explique por qué lo es. En caso negativo, ¿existe algún valor de k o t_0 que permita aproximar este sistema a un sistema causal en forma razonable?

Solución

Vemos que la función de transferencia es una Gaussiana multiplicada por una exponencial compleja, por lo que sabemos que la respuesta al impulso será otra Gaussiana desplazada en el tiempo una cantidad t_0. En efecto, podemos escribir

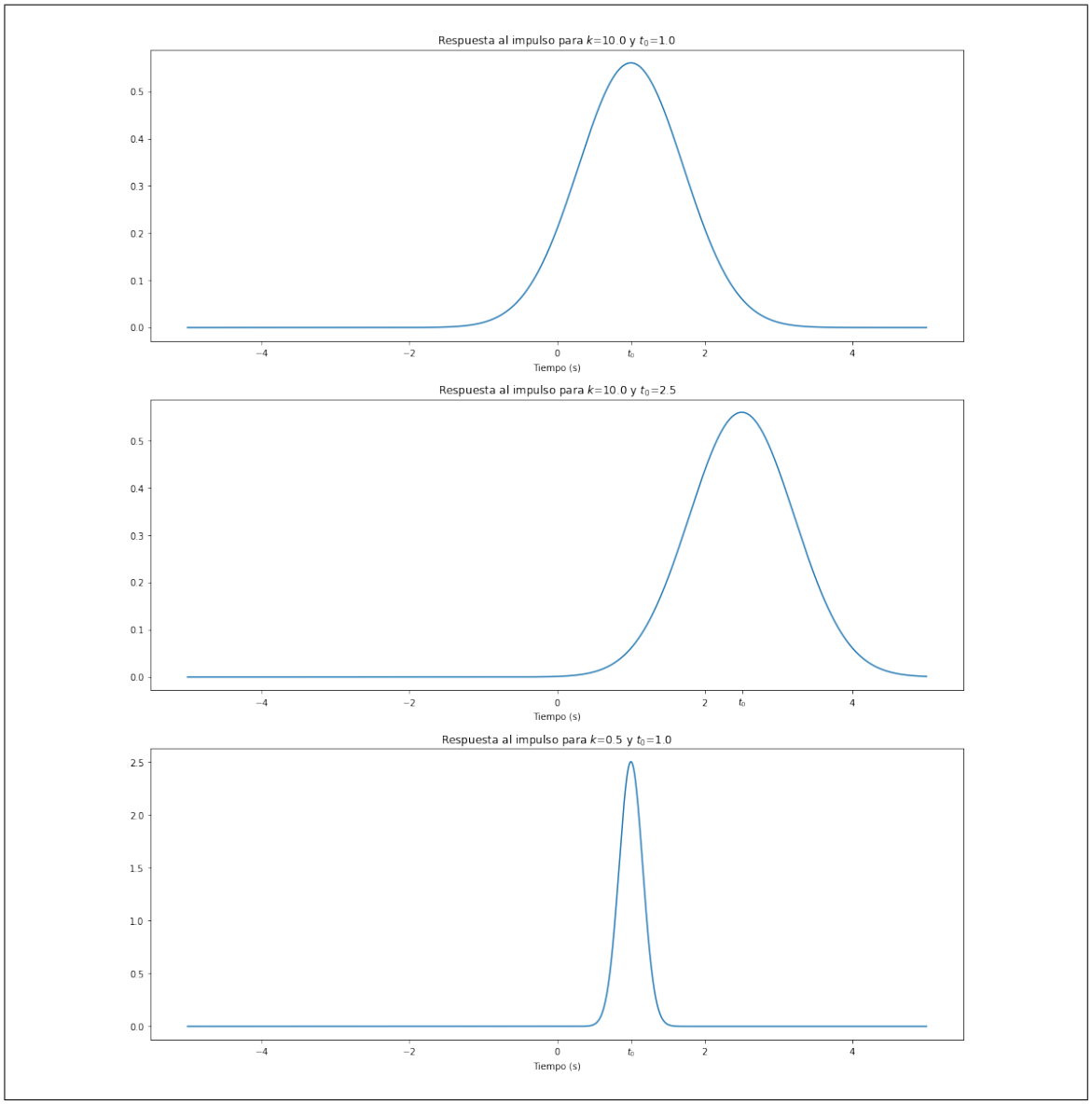
La pregunta 7 continúa en la página siguiente ...

$$H(u) = e^{-i2\pi t_0 u} \times \text{Gauss}\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}u\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Tomando Transformada de Fourier inversa,

$$h(t) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\text{Gauss}\left(\sqrt{\frac{\pi}{k}}(t - t0)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-\frac{\pi^2(t-t0)^2}{k}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Claramente este es un sistema no causal, puesto que su respuesta al impulso anticipa a la entrada (impulso), como se observa en la figura. Sin embargo, para algunos valores relativamente grandes de t_0, que controla el desplazamiento de la señal hacia la derecha, la porción de la Gaussiana hacia la izquierda del 0 puede ser mínima. Lo mismo se podría lograr cambiando el valor de k, que controla el ancho de la respuesta al impulso, o alguna combinación de ambas cantidades, como se observa en la figura $\rightarrow$ **1 pt.**



8. (3 pts.) Considere la Transformada Hartley Discreta (DHT) de una señal periódica de período N, definida como

$$H[k] = \mathcal{H}\{f[n]\}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N} nk\right)$$

donde $\operatorname{cas}(x) = \cos(x) + \sin(x)$. Determine la propiedad de la convolución circular para la DHT.

Solución

Sea $F[k]$ la DFT de $f[n]$. Es claro que

La pregunta 8 continúa en la página siguiente ...

$$H[k] = \text{Re}\{F[k]\} - \text{Im}\{F[k]\}$$

y además

$$F[k] = H_e[k] - iH_o[k] = \frac{H[k] + H[N-k]}{2} - i\left(\frac{H[k] - H[N-k]}{2}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

donde $H_e[k]$ es la parte par de $H[k]$ y H_o es la parte impar de $H[k]$.

Por lo tanto, la propiedad de la convolución de la DHT para dos funciones $f[n]$ y $g[n]$, la podemos obtener mediante la convolución en el dominio de Fourier

$$\text{DFT}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k] = N\left(\frac{H[k] + H[N-k]}{2} - i\left(\frac{H[k] - H[N-k]}{2}\right)\right) \times \left(\frac{G[k] + G[N-k]}{2} - i\left(\frac{G[k] - G[N-k]}{2}\right)\right)$$

Lo que falta ahora es encontrar la DHT a partir de la expresión anterior, es decir:

$$\mathcal{H}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k] = N(\text{Re}\{\text{DFT}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k]\} - \text{Im}\{\text{DFT}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k]\}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, nos queda que

$$\frac{\mathcal{H}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k]}{N} = \frac{H[k] + H[N-k]}{2}\frac{G[k] + G[N-k]}{2} - \frac{H[k] + H[N-k]}{2}\frac{G[k] - G[N-k]}{2} + \frac{H[k] - H[N-k]}{2}\frac{G[k] + G[N-k]}{2} + \frac{H[k] + H[N-k]}{2}\frac{G[k] - G[N-k]}{2}$$

multiplicando término a término,

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{H}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k]}{N} = &\frac{H[k]G[k]}{2} + \frac{H[k]G[N-k]}{2} + \frac{H[N-k]G[k]}{2} + \frac{H[N-k]G[N-k]}{2} \\ &- \frac{H[k]G[k]}{2} + \frac{H[k]G[N-k]}{2} + \frac{H[N-k]G[k]}{2} - \frac{H[N-k]G[N-k]}{2} \\ &+ \frac{H[k]G[k]}{2} + \frac{H[k]G[N-k]}{2} - \frac{H[N-k]G[k]}{2} - \frac{H[N-k]G[N-k]}{2} \\ &+ \frac{H[k]G[k]}{2} - \frac{H[k]G[N-k]}{2} + \frac{H[N-k]G[k]}{2} - \frac{H[N-k]G[N-k]}{2}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\mathcal{H}\{(f \circledast_N g)[n]\}][k] = N\left(H[k]G[k] + H[k]G[N-k] + H[N-k]G[k] - H[N-k]G[N-k]\right)}$$

$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

9. (3 pts.) Tenemos que la DFT de una señal $\tilde{f}[n]$ real con media cero es

$$\tilde{F}[k] = \left[\begin{array}{cccc} \underline{a} & b & 1 & 2-i \end{array} \right].$$

¿Cuál es el valor de a y b?

Solución

Inmediatamente tenemos que $\tilde{F}[0] = a = 0$, porque la señal $\tilde{f}[n]$ tiene media cero → **1 pt.**

Además, como $\tilde{F}[k]$ es la DFT de una señal real, eso quiere decir que es hermitiana (parte real par y parte imaginaria impar) → **1 pt.** Por lo tanto

$$\tilde{F}[k] = \left[\begin{array}{cccc} \underline{0} & 2+i & 1 & 2-i \end{array} \right], \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

con $a = 0$ y $b = 2 + i$.

10. (3 pts.) Sea una señal de largo N múltiplo de 3, donde $\tilde{f}[n] \overset{\text{DFT}}{\rightarrow} \tilde{F}[k]$. Encuentre la DFT de

$$\tilde{g}[n] = \tilde{f}[n - 2N/3] + \tilde{f}[n + N/3].$$

Solución

Al ser $\tilde{f}[n]$ una señal periódica de periodo N, entonces $\tilde{f}[n - 2N/3] = \tilde{f}[n + N/3] \rightarrow$ **1 pt.**

Luego, estaremos sumando dos veces $\tilde{f}[n + N/3]$ → **1 pt.** Ahora, aplicando la propiedad de desplazamiento

$$\begin{aligned} \tilde{g}[n] &\overset{\text{DFT}}{\rightarrow} 2\tilde{F}[k]\, e^{i2\pi k \frac{N/3}{N}} \\ &= 2\tilde{F}[k]\, e^{i2\pi k/3} \rightarrow \textbf{1 pt.} \end{aligned}$$

11. (3 pts.) Considere la siguiente función de transferencia de un sistema:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}.$$

Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ de tal forma que el sistema sea estable.

Solución

Aplicando fracciones parciales tenemos que

$$H(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Como esta función de transferencia tiene polos en $z_1 = \frac{1}{2}$ y $z_2 = 2$, la única combinación para que la ROC contenga a la circunferencia unitaria (criterio de estabilidad) es $\frac{1}{2} < |z| < 2$ → **1 pt.**

Por lo tanto, la expresión asociada al primer polo sera "derecha" y la del segundo será "izquierda":

$$h\left[n\right] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sqcap [n] - \frac{4}{3}2^{n} \sqcap [-n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

12. (3 pts.) Considere el sistema discreto descrito por la ecuación de diferencias

$$g[n] = 3g[n-1] + \frac{1}{3}f[n] - f[n-1]$$

Determine si el sistema es estable y cual es su respuesta al impulso.

Solución

Aplicando Transformada Z, tenemos

$$G(z) - 3z^{-1}G(z) = \frac{1}{3}F(z) - z^{-1}F(z)$$

por lo que la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{\frac{1}{3} - z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} = \frac{\frac{z}{3} - 1}{z - 3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Observamos que la función de transferencia tiene un cero en $z = 3$ y un polo también en $z = 3$, lo que implica que el sistema es teóricamente estable a pesar de tener un polo fuera del círculo unitario, porque se cancela con el cero $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

Para encontrar la respuesta al impulso utilizamos una simple división polinomial

$$\frac{z}{3} - 1 : z - 3 = \frac{1}{3}$$

por lo que la respuesta al impulso es

$$h[n] = \frac{1}{3}\delta[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$