Prueba 5 Solución

1. [8 ptos] Se tiene un sistema lineal e invariante discreto, cuya salida $g[n]$ a la entrada $f[n]$ es

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} (a^{n-k} g[k] + b^{n-k} f[k]) \quad \text{con } |a| < 1 \text{ y } |b| < 1$$

Encuentre la función de transferencia del sistema en forma cerrada, es decir, expresada como un cociente de polinomios de grado finito.

Solución: Desarrollando la sumatoria, tenemos

$$\begin{aligned}
g[n] - ag[n-1] - a^2 g[n-2] - \cdots &= bf[n-1] + b^2 f[n-2] + \cdots \\
G(z)(1 - az^{-1} - a^2 z^{-2} - \cdots) &= F(z)(bz^{-1} + b^2 z^{-2} + b^3 z^{-3} + \cdots) \\
G(z)(2 - (1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots) &= bz^{-1} F(z)(1 + bz^{-1} + b^2 z^{-2} + \cdots) \\
G(z)\left(2 - \frac{1}{1 - az^{-1}}\right) &= bz^{-1} F(z) \frac{1}{1 - bz^{-1}} \\
G(z) \frac{1 - 2az^{-1}}{1 - az^{-1}} &= F(z) \frac{bz^{-1}}{1 - bz^{-1}}
\end{aligned}$$

De donde, la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{bz^{-1}}{1 - bz^{-1}} \frac{1 - az^{-1}}{1 - 2az^{-1}}$$

2. [8 ptos] Se sabe que la transformada Z de $a^n \sqcap[n]$ es $\frac{1}{1-az^{-1}}$. Grafique el módulo de la DTFT de $a^n \sqcap[n]$ considerando que el periodo de muestreo es $T = 1$ con $a = 1/2$. En su gráfico indique el valor de los puntos más relevantes.

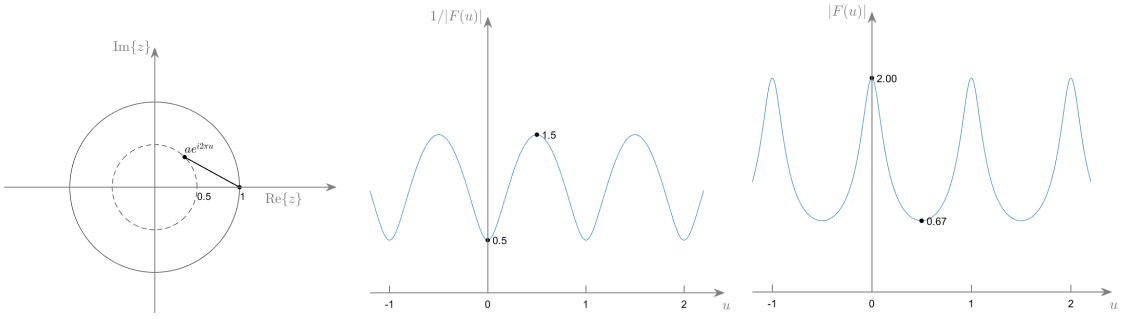
Solución: La DTFT está en el círculo unitario de la ZT, es decir, considerando $T = 1$,

$$\tilde{F}(u) = Z(e^{i2\pi u}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-i2\pi u}}$$

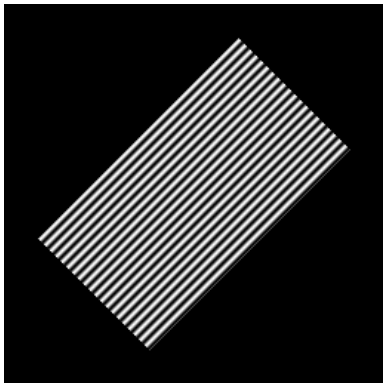
de donde

$$|\tilde{F}(u)| = \frac{1}{|1 - 0.5e^{-i2\pi u}|}$$

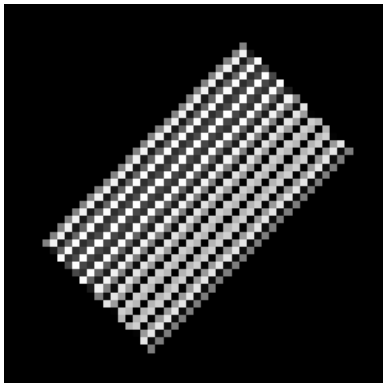
El módulo del denominador es periódico en u y vale de 0.5 a 1.5 (se puede apreciar como el largo de la recta que conecta $z = 1$ a $z = e^{-i2\pi u}$). Su inversa irá de 0.66 a 2.



3. [8 ptos] Se tiene una buena fotografía de una plancha de zinc de 100×180 cm idealizada (se supone que es una sinusoide) de 20 canaletas y que está rotada en 45°. El campo visual de la fotografía es de 240×240 cm y tiene 256×256 pixeles. El agente de publicidad necesita publicar esta imagen minimizando el tamaño. Lo intentó con 50×50, pero se ve muy mal.



256×256



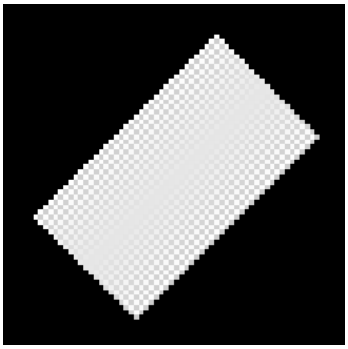
50×50

   (a) [4 ptos] Encuentre el tamaño mínimo que debe tener la fotografía de manera que se distingan bien las canaletas (¡y que no falte ninguna!).

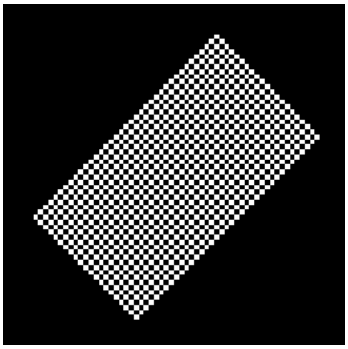
   (b) [4 ptos] Encuentre analíticamente $f(x, y)$ que describe la plancha de zinc idealizada, y encuentre su transformada de Fourier.

Solución:

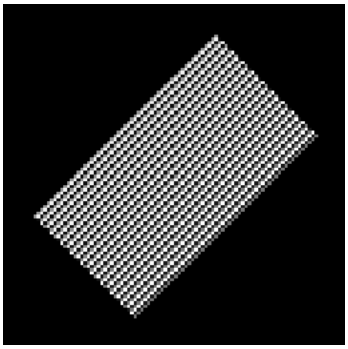
   (a) El tamaño de la imagen debe ser tal que el muestreo de la imagen se haga al menos a la frecuencia de Nyquist. La frecuencia del zinc (en el sentido transversal) es 20/100 canaletas por cm, es decir $u = 0.2$ [1/cm]. Como está rotada en 45°, la frecuencia horizontal (o vertical) es $u_x = u_y = 0.2/\sqrt{2} \approx 0.14$, por lo que la frecuencia de Nyquist es aproximadamente 0.28 [1/cm]. Para tener una frecuencia de muestreo de 0.28 se deben tomar 0.28×240 (240 es el tamaño de la imagen en cm) muestras o pixeles. Es decir, el tamaño de la imagen debe ser aproximadamente 68×68. Esta es la respuesta pedida para la prueba, sin embargo, como se aprecia en las figuras, muestrear justo a la frecuencia de Nyquist puede no resultar bien, dependiendo donde caigan las muestras (en un caso usé seno para el zinc y en el otro coseno). Podríamos asegurarnos si usamos un 50% más de frecuencia de muestreo.



68×68 (sen)



68×68 (cos)



102×102 (sen)

(b) Es conveniente hacerlo con la plancha sin rotar primero. La sinusoide será $\text{sen}\,(2\pi u_x x)$ con $u_x = 0.2$. También se podría usar el coseno. Los límites de la plancha estarán dados por un rect de ancho 100 y largo 180, es decir, la plancha sin rotar es

$$f_s(x,y) = \sqcap\left(\frac{x}{100}, \frac{y}{180}\right) \text{sen}\,(2\pi u_x x)$$

para rotarla sustituimos x por $x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ e y por $x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$. Es decir

$$f(x,y) = \sqcap\left(\frac{x-y}{100\sqrt{2}}, \frac{x+y}{180\sqrt{2}}\right) \text{sen}\,(\pi u_x \frac{x-y}{\sqrt{2}})$$

para encontrar la transformada de Fourier, lo hacemos primero de f_s y luego rotamos

$$\begin{aligned} f_s(x,y) = \sqcap\left(\frac{x}{100}, \frac{y}{180}\right) \text{sen}\,(2\pi u_x x) \quad &\longrightarrow \quad 9000\ \text{sinc}\,(100u, 180v) \times \\ &\quad i(\delta(u+u_x, v) - \delta(u-u_x, v)) \end{aligned}$$

y rotando, tenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad &\longrightarrow \quad 9000\ \text{sinc}\,(50\sqrt{2}(u-v), 90\sqrt{2}(u+v)) \times \\ &\quad i(\delta(u+\frac{u_x}{\sqrt{2}}, v+\frac{u_x}{\sqrt{2}}) - \delta(u-\frac{u_x}{\sqrt{2}}, v-\frac{u_x}{\sqrt{2}})) \end{aligned}$$

Nótese que para no enredarme con el impulso de una función, coloqué directamente los impulsos 2D en sus posiciones rotadas.

Algunas transformadas Z

$\delta[n] \longrightarrow 1 \quad \forall z$

$\delta[n-m] \longrightarrow z^{-m} \quad \forall z$ excepto 0 para $m > 0$

$\sqcap[n] \longrightarrow \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$

$-\sqcap[-n-1] \longrightarrow \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| < 1$

$a^n \sqcap[n] \longrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

$-a^n \sqcap[-n-1] \longrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| < |a|$

$na^n \sqcap[n] \longrightarrow \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$

$-na^n \sqcap[-n-1] \longrightarrow \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| < |a|$

Algunas transformadas de Fourier

$e^{-\pi x^2} \longrightarrow e^{-\pi u^2}$

$\sqcap(x) \longrightarrow \operatorname{sinc}(u)$

$\wedge(x) \longrightarrow \operatorname{sinc}^2(u)$

$\delta(x) \longrightarrow 1$

$\cos(\pi x) \longrightarrow \uparrow\uparrow(u)$

$\operatorname{sen}(\pi x) \longrightarrow i \uparrow\downarrow(u)$

$\sqcup\!\sqcup(x) \longrightarrow \sqcup\!\sqcup(u)$

$e^{-|x|} \longrightarrow \dfrac{2}{1+(2\pi u)^2}$

$\sqsubset(x) \longrightarrow \dfrac{1}{2}\delta(u) - \dfrac{i}{2\pi u}$

$\operatorname{sgn}(x) \longrightarrow -\dfrac{i}{\pi u}$

$e^{-i\pi x^2} \longrightarrow e^{i(\pi u^2 - \pi/4)}$