IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 4A: Transformada de Laplace: definición y bases

Pierre-Simon Laplace



1749 – 1827

Matemático y astrónomos

Mécanique Céleste: transforma el estudio geométrico de la física clásica en uno basado en cálculo.

Théorie analytique des probabilités: funda la interpretación bayesiana.

Ecuación de Laplace: $\nabla^2 \varphi = 0$

Transformada de Laplace: en probabilidades y para resolver ecuaciones diferenciales.

político: Ministro del interior de Napoleón, marqués.

Wikipedia

Transformada de Fourier

Los “coeficientes” de Fourier (la parte real) se calculan así:

$$\Re F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi u t \, dt$$

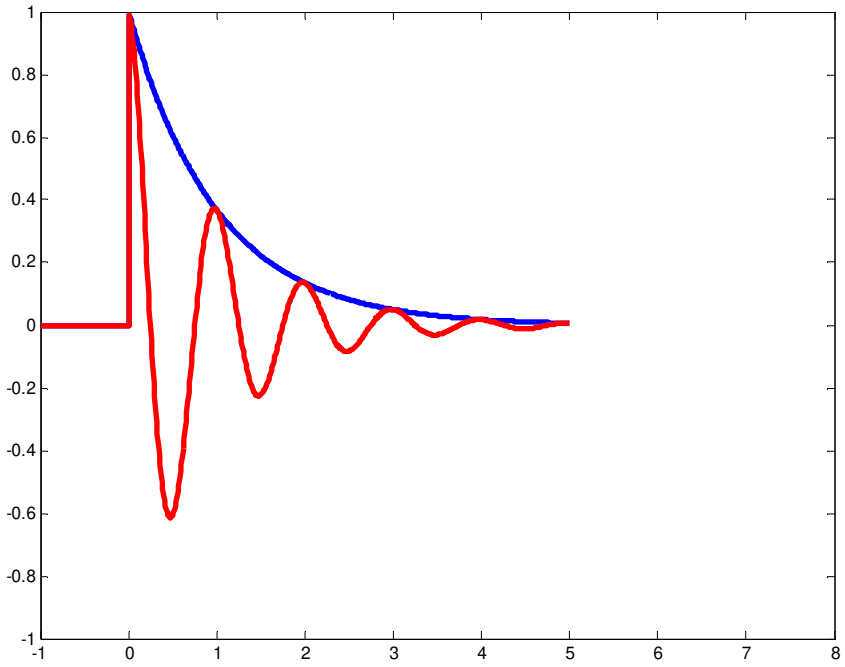
Supongamos $f(t) = e^{-t} \sqcap(t)$

$$F(u) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos 2\pi u t \, dt$$

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^{-t} \sqcap (t)$$

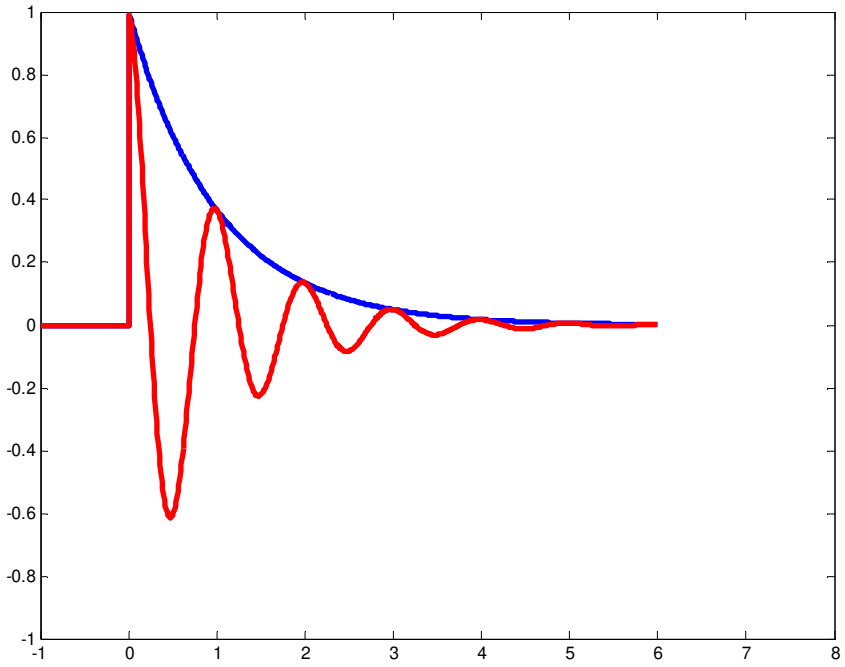


Integral = 0.0196

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^{-t} \sqcap (t)$$

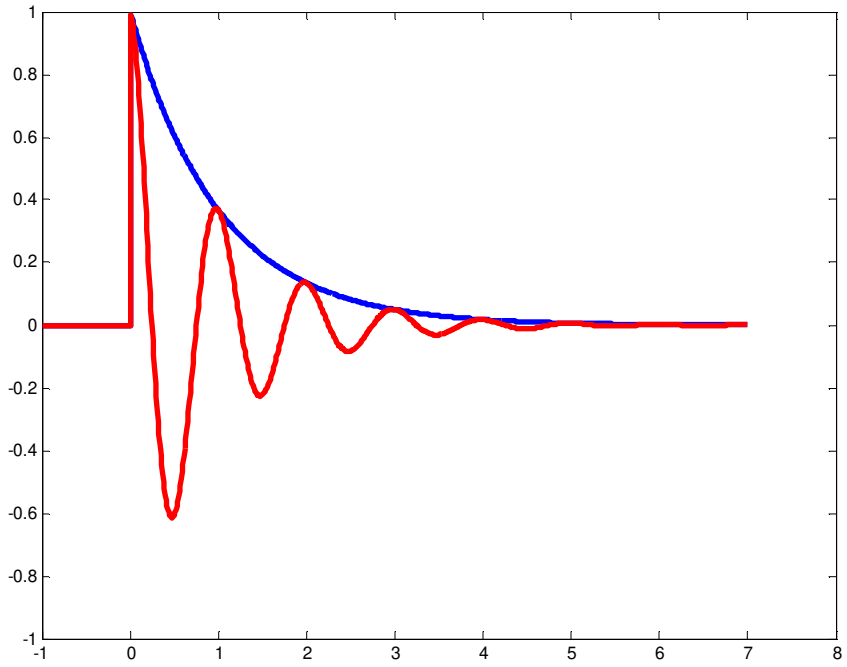


Integral = 0.0197

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^{-t} \sqcap (t)$$

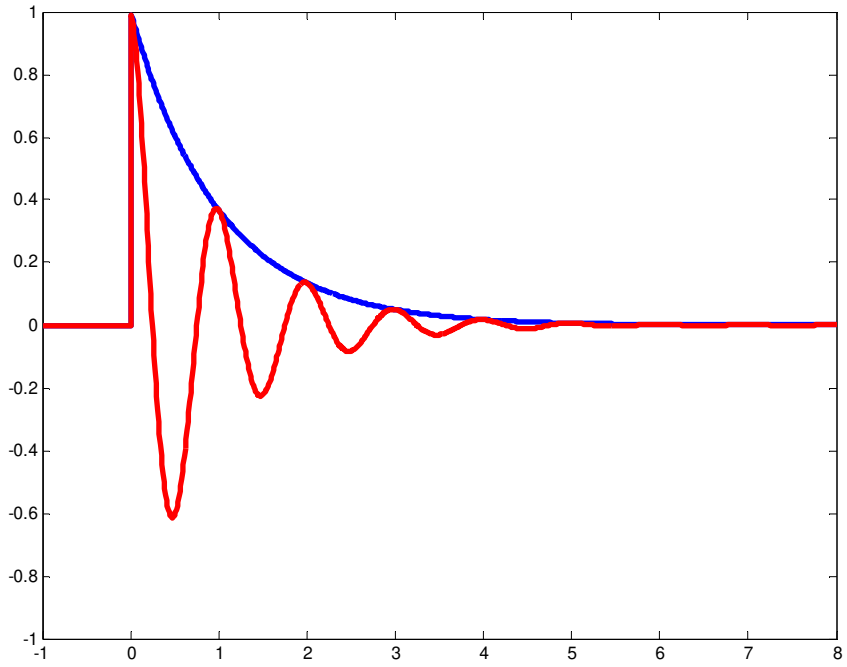


Integral = 0.0197

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^{-t} \sqcap (t)$$



Integral = 0.0197

Transformada de Fourier

Supongamos

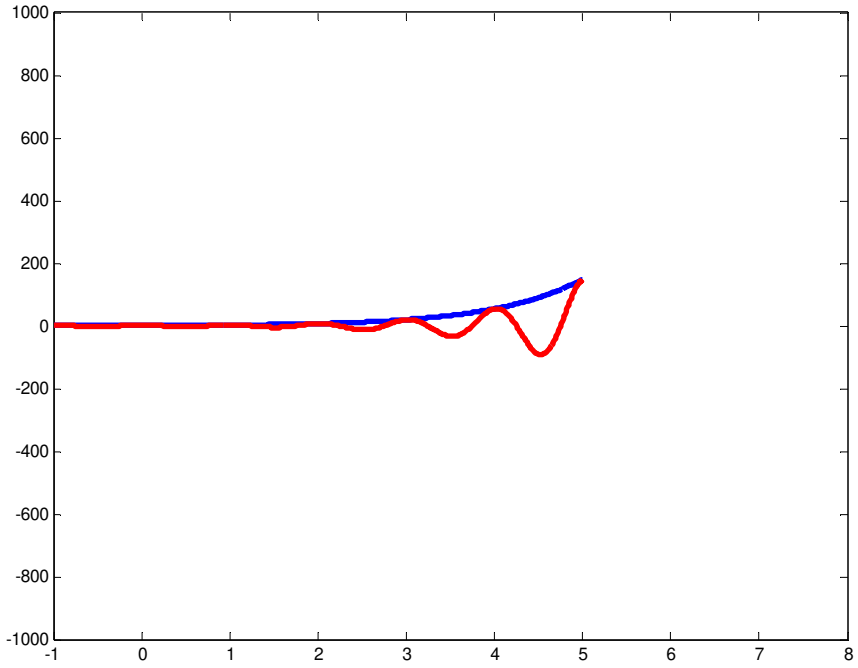
$$f(t) = e^t$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t \cos 2\pi u t \, dt$$

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^t$$

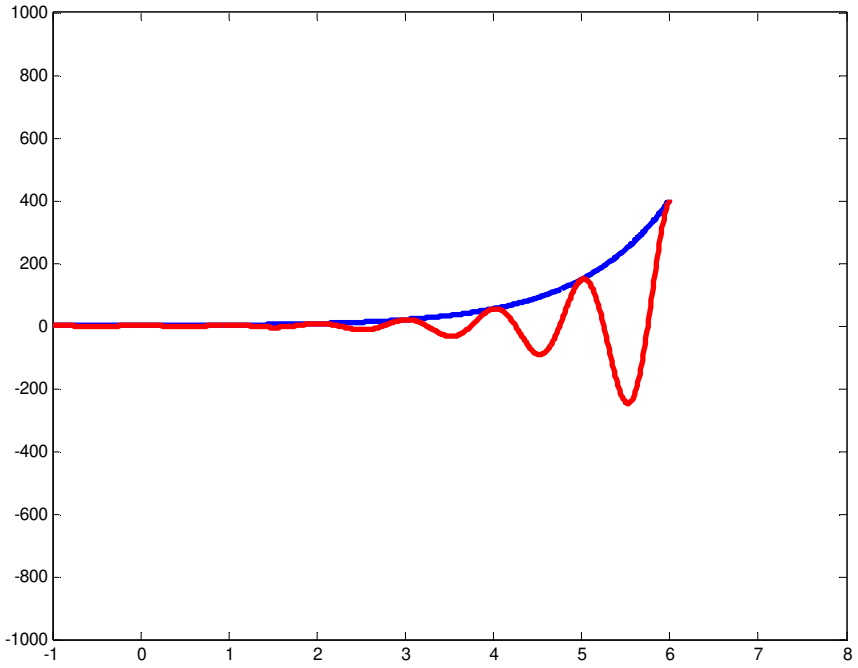


Integral = 4.4025

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^t$$

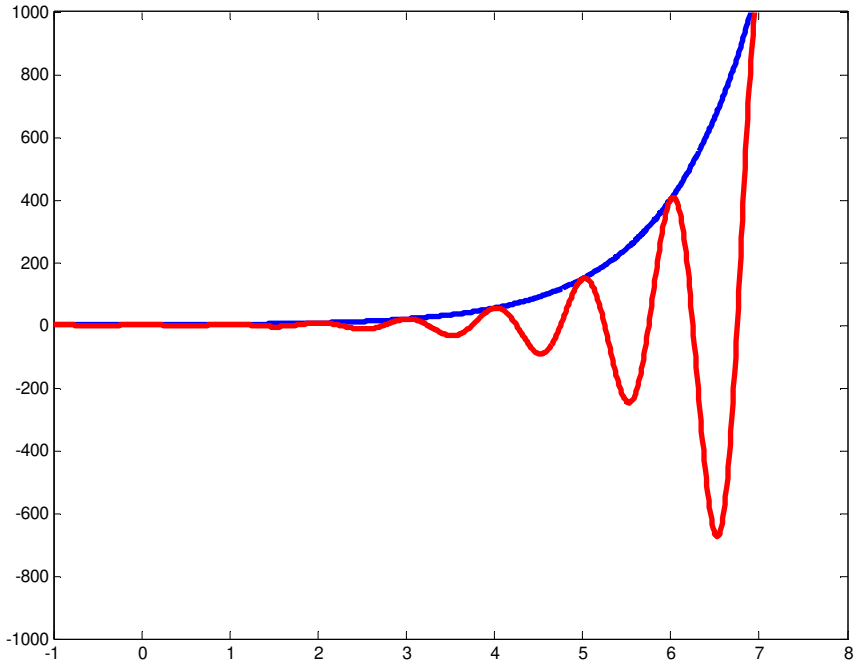


Integral = 11.9798

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^t$$

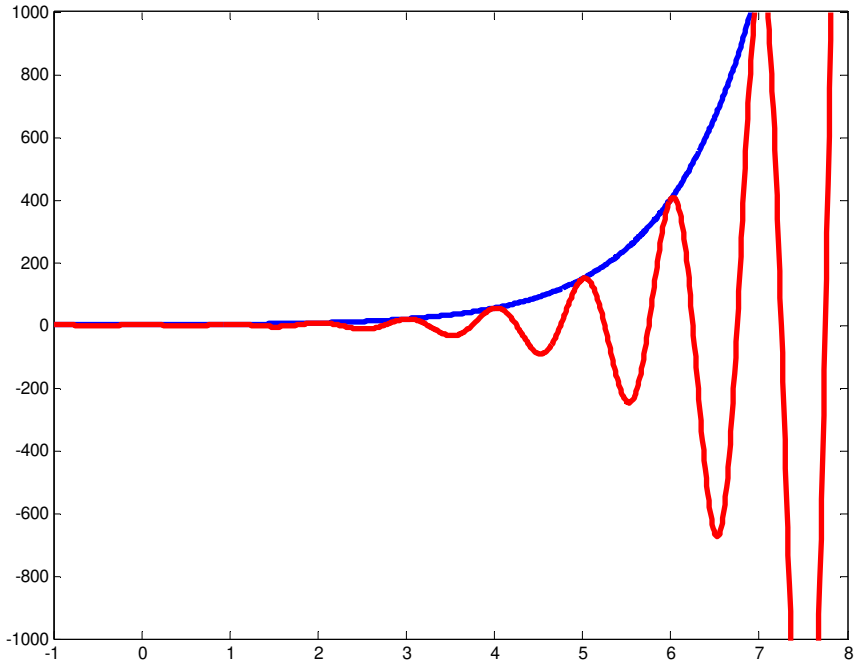


Integral = 32.5769

Transformada de Fourier

u = 1 Hz

$$f(t) = e^t$$



Integral = 88.5655

4 Transformada de Laplace

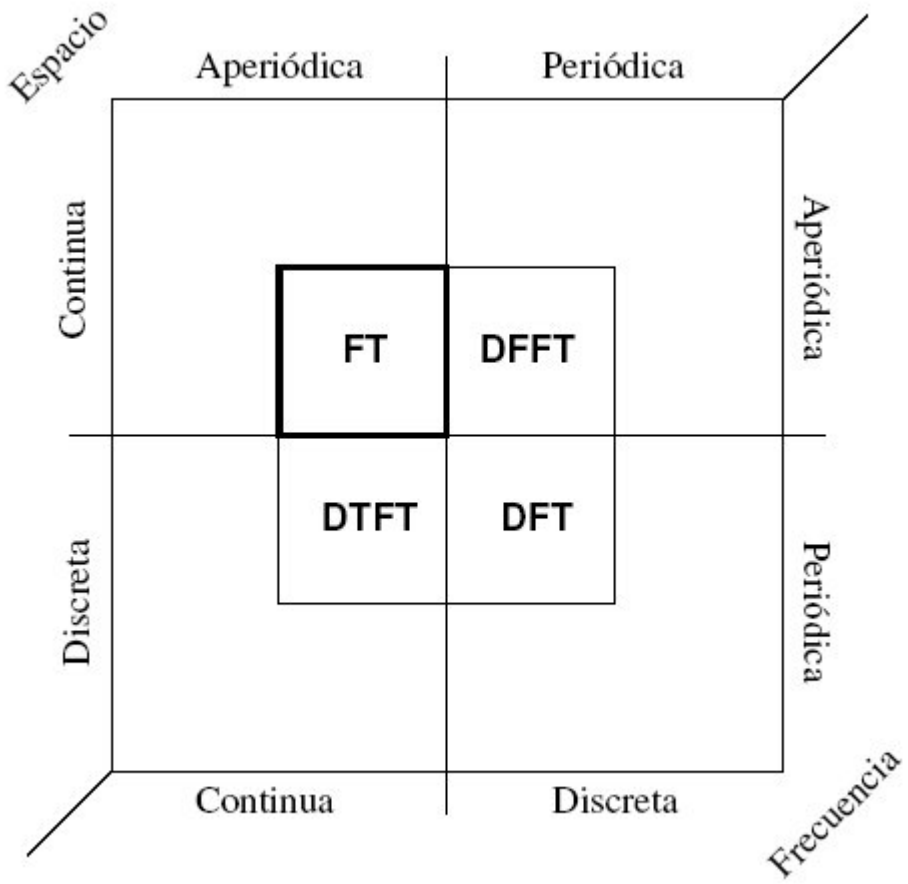
Razones por la que existe la transformada de Laplace:

1. Aplicable a un número mayor de funciones
2. Incluye información de transientes
3. Solución de ecuaciones diferenciales

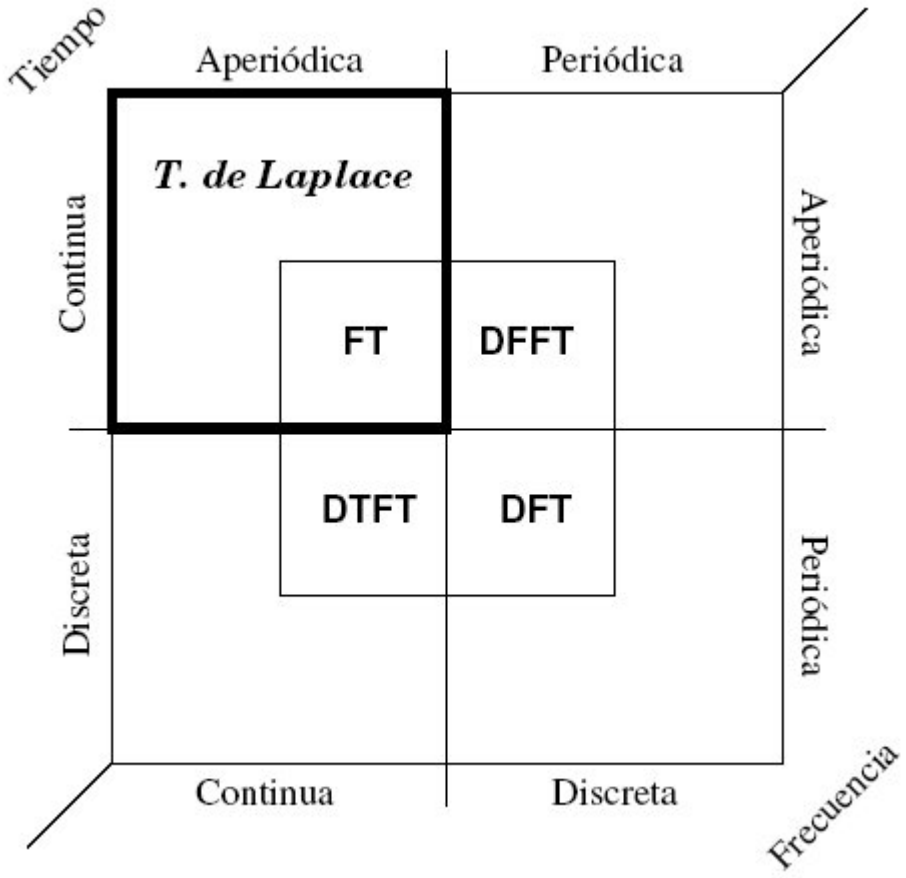
$$¿\mathcal{F}\{t\sqcap(t)\}?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t\sqcap(t)|\, dt \not< \infty$$

4 Transformada de Laplace



4 Transformada de Laplace



4.1 Transformada de Laplace

Versión modificada de la transformada de Fourier

$$F(\sigma, u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-i2\pi u t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + i2\pi u)t}\, dt$$

Se introduce la frecuencia compleja $s = \sigma + i2\pi u$

Definición de la transformada de Laplace

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

Con restricciones para σ

4.1 Transformada de Laplace

Definición

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \alpha < Re\{s\} < \beta$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad \alpha < Re\{s\} < \beta$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

o simplemente $\qquad f(t) \longrightarrow F(s)$

4.1 Transformada de Laplace

Frecuencia compleja

$$s = \sigma + i2\pi u$$

Las bases de Laplace son

$$\{e^{st}\}$$

Difíciles de graficar porque son funciones complejas de argumento complejo

4.2 Relación FT y LT

Si $f(t)$ no tiene FT porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \not< \infty,$$

¿Tendrá $f(t)e^{-\sigma t}$?

La respuesta depende del valor de σ, $F(\sigma, u)$:

$$¿ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}|\, dt < \infty?$$

4.2 Relación FT y LT

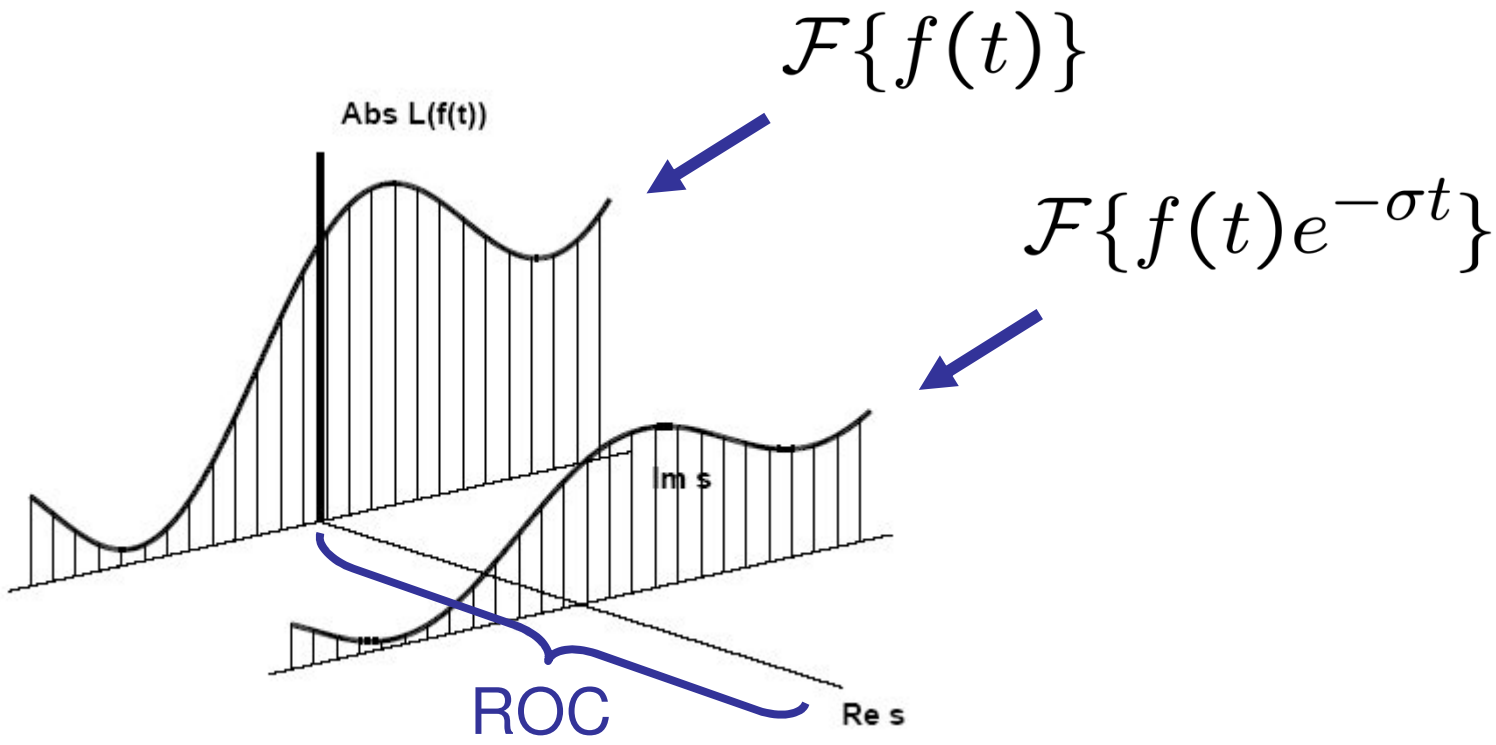
Sea

$$\begin{aligned} F(\sigma, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-i2\pi u t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + i2\pi u)t}\, dt \end{aligned}$$

Pero $s = \sigma + i2\pi u$

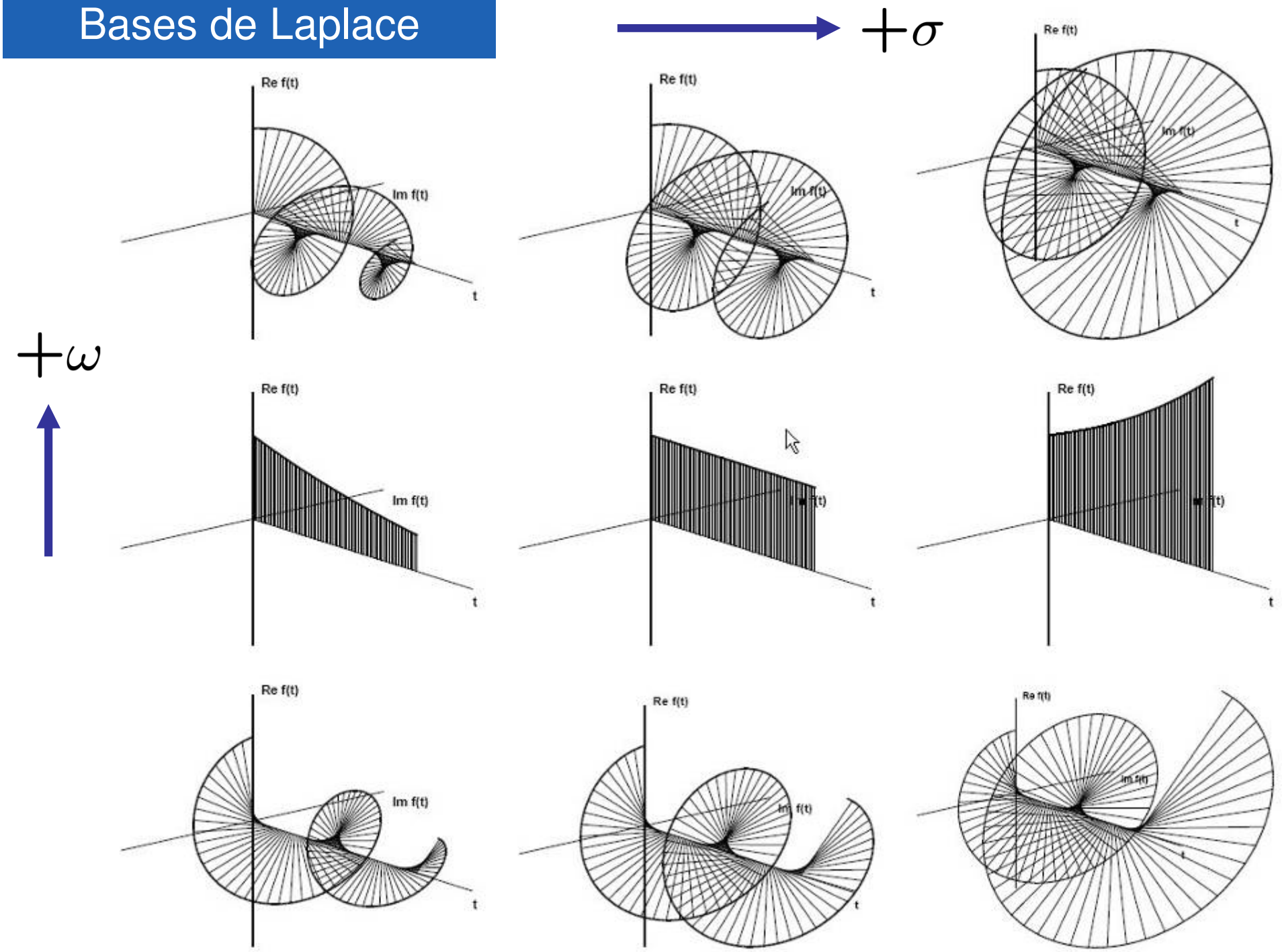
$$\begin{aligned} F(s) &= F(\sigma + i2\pi u) \\ &= \mathcal{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt \end{aligned}$$

4.2 Relación FT y LT



Región de convergencia: rango de σ para el cual existe transformada de Fourier

Bases de Laplace



4.2 Bases de Laplace

