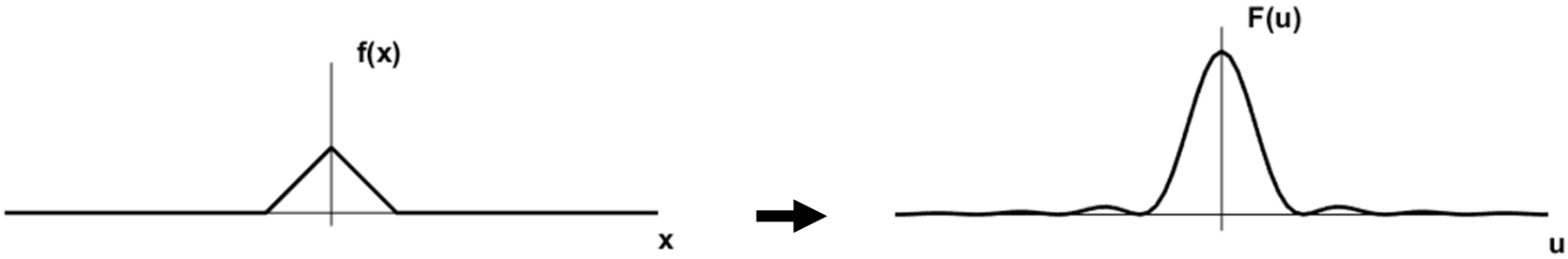
IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 6A: Transformadas de Fourier Discretas en solo un dominio

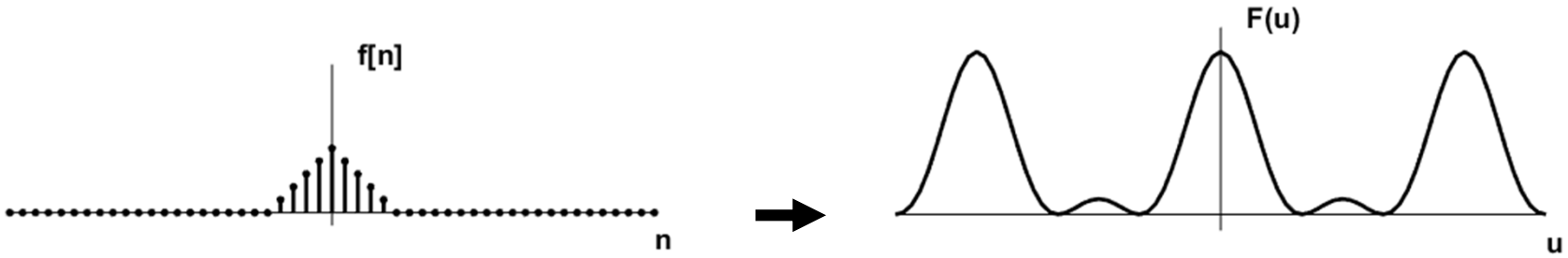
Las transformadas de Fourier

FT: continuo a continuo



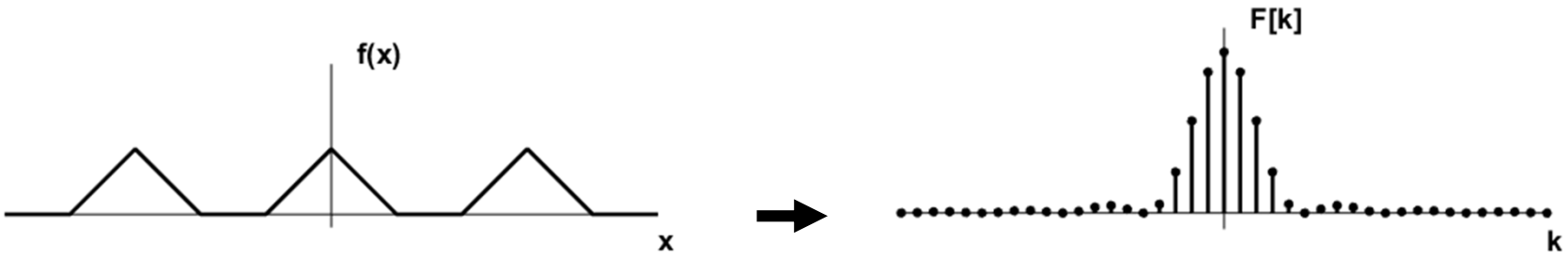
Las transformadas de Fourier

DTFT: discreto a continuo



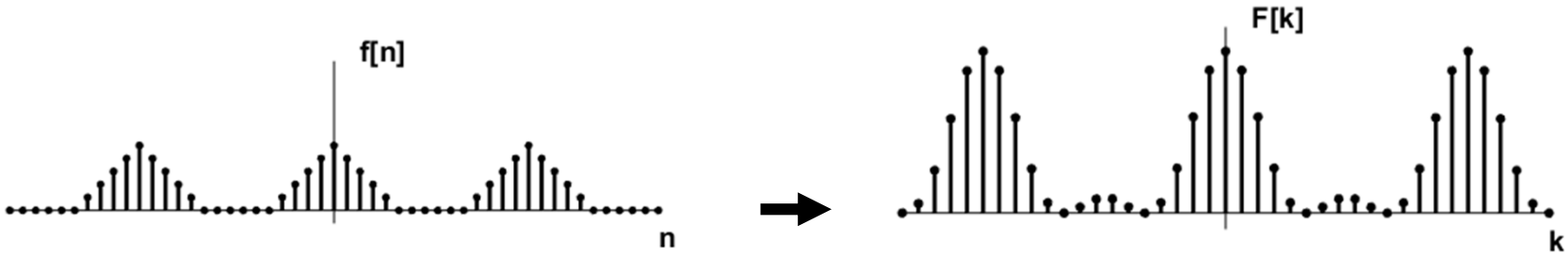
Las transformadas de Fourier

DFFT: continuo a discreto



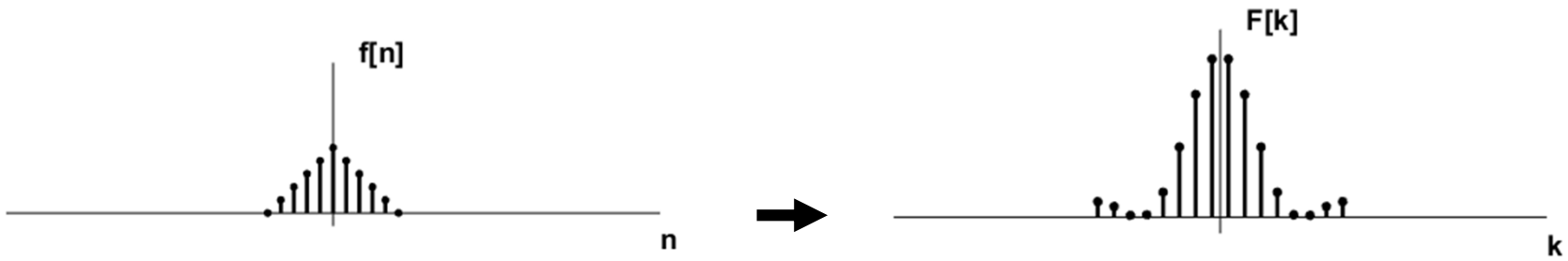
Las transformadas de Fourier

DFT: discreto a discreto
(interpretación periódica)

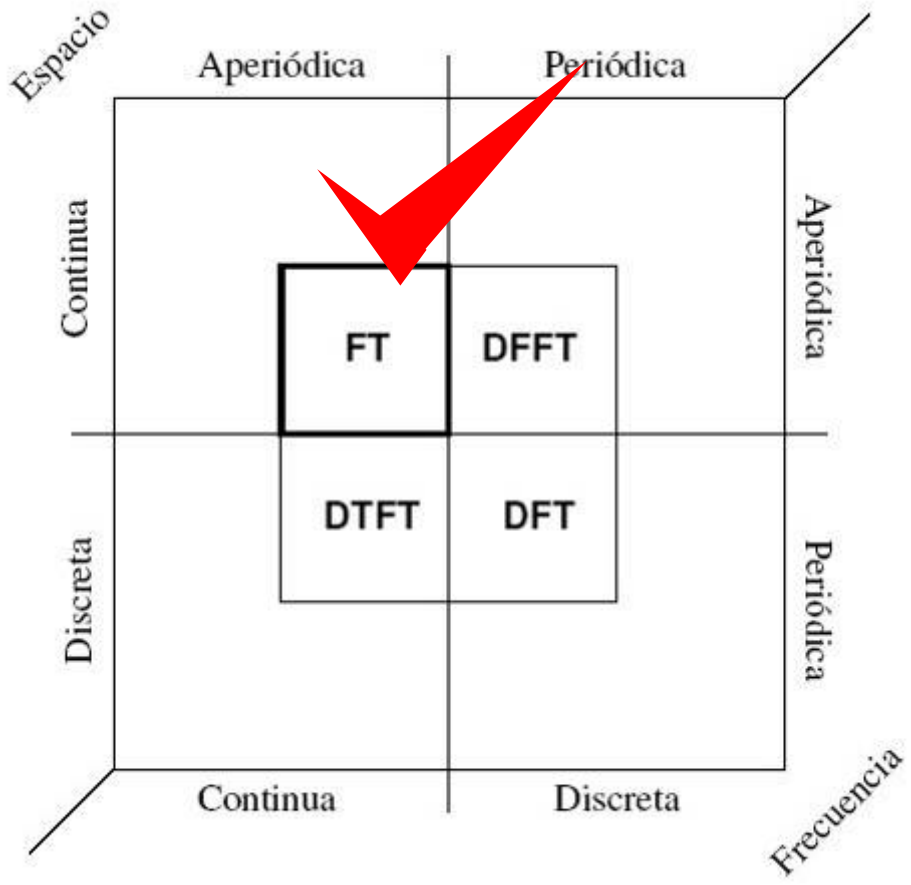


Las transformadas de Fourier

DFT: discreto a discreto
(N muestras)

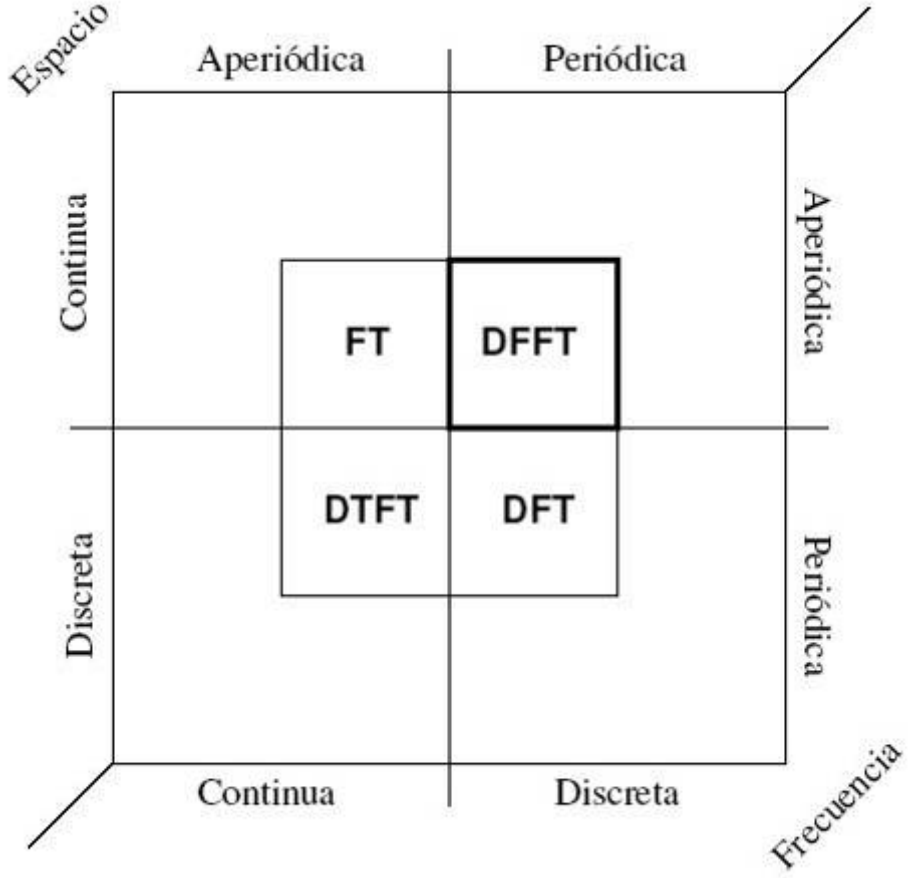


6.1 Introducción



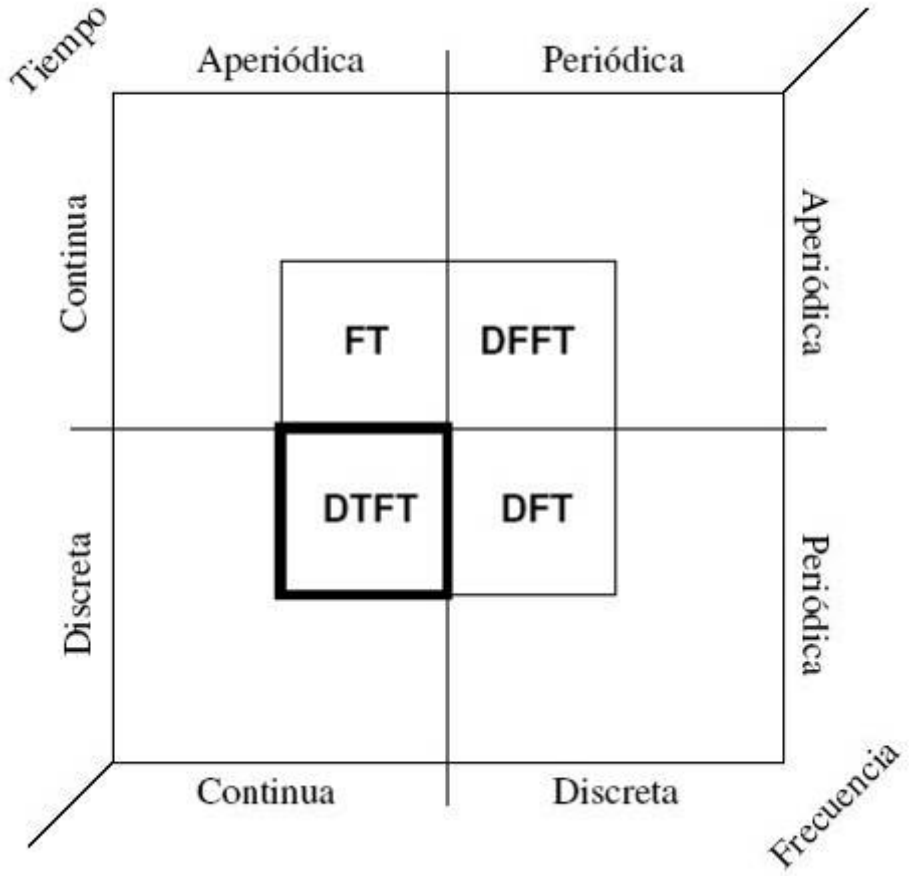
6.1 Introducción

Discrete Frequency Fourier Transform



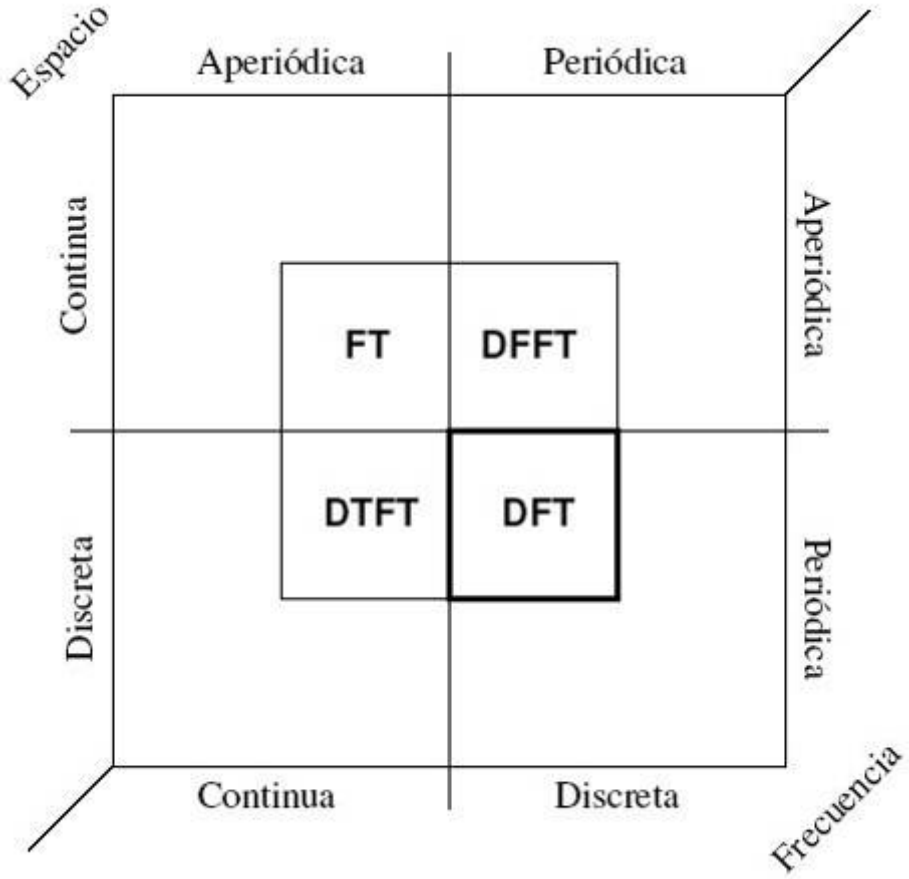
6.1 Introducción

Discrete Time Fourier Transform



6.1 Introducción

Discrete Fourier Transform



Resumen por dominios

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux}\, dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux}\, du$$

FT – ***x*** : continuo ***u*** : continuo

DFFT – ***x*** : continuo ***u*** : discreto (***k***)

DTFT – ***x*** : discreto (***n***) ***u*** : continuo

DFT – ***x*** : discreto (***n***) ***u*** : discreto (***k***)

6.2 FT de tiempo discreto

La idea es encontrar las componentes de frecuencia de una señal discreta

$$f[n] \longrightarrow \tilde{F}(u)$$

- Señal no periódica : transformada continua
- Señal discreta: transformada periódica

6.2 FT de tiempo discreto

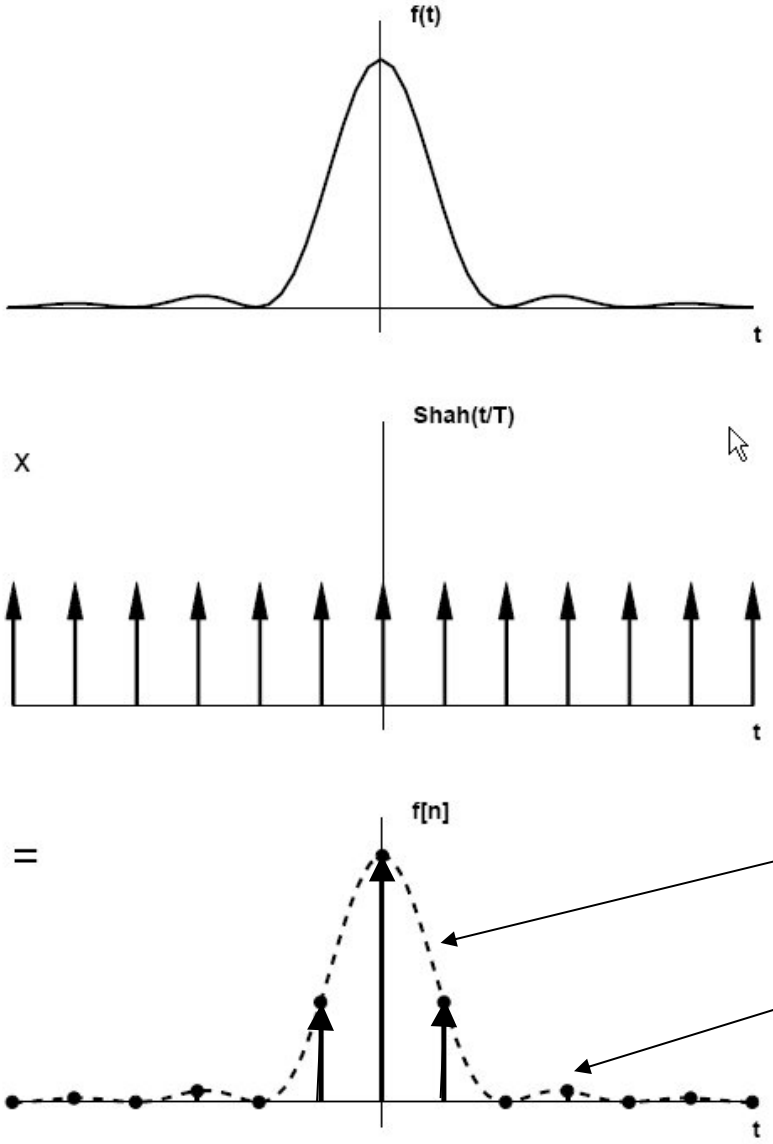
Empleando una función auxiliar continua (cualquiera)

$$f[n] = Tf(nT)$$

Sea

$$f_s(t) = \text{Ш}(t/T)f(t) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT)$$

6.2 FT de tiempo discreto



$f(t)$

$f_s(t)$

$f[n]$

6.2 FT de tiempo discreto

Tomando FT de $f_s(t)$

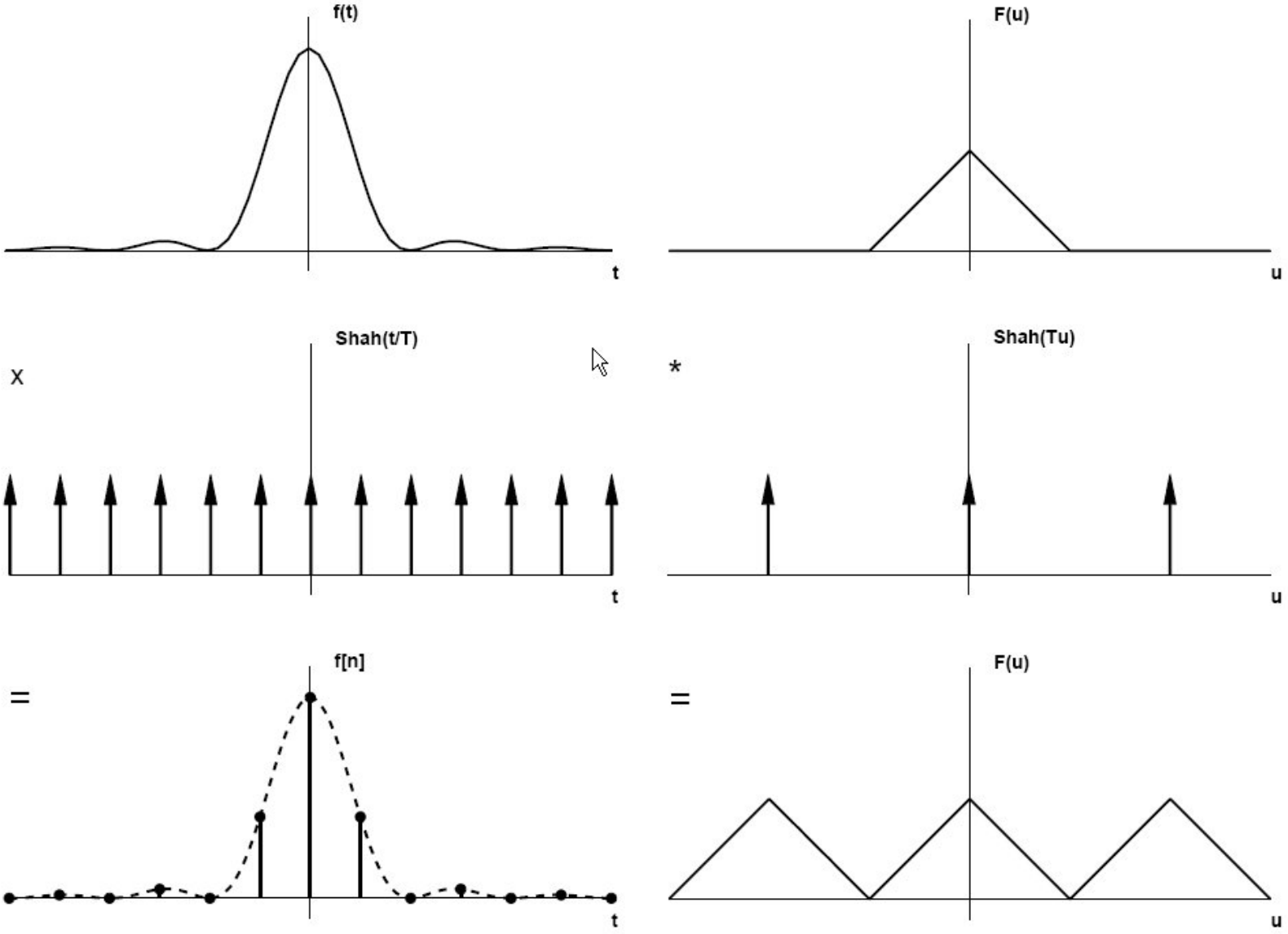
$$F_s(u) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\mathcal{F}\{\delta(t-nT)\}$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-i2\pi unT}.$$

DTFT

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-i2\pi unT}$$

6.2 FT de tiempo discreto



6.2 FT de tiempo discreto

Inversa

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ut}\,du,$$

Suponiendo

$$F(u) = 0 \qquad |u| > \frac{1}{2T}$$

$$f(t) = \int_{0}^{1/T} \tilde{F}(u)e^{i2\pi ut}\,du,$$

6.2 FT de tiempo discreto

pero

$$f[n] = T f(nT)$$

DTFT inversa

$$f[n] = T \int_0^{1/T} \tilde{F}(u) e^{i2\pi u n T} \, du.$$

Resumen por dominios

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux}\, dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux}\, du$$

FT – ***x*** : continuo ***u*** : continuo

DFFT – ***x*** : continuo ***u*** : discreto (***k***)

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i2\pi unT}$$

$$f[n] = T \int_{0}^{1/T} \tilde{F}(u) e^{i2\pi unT}\, du.$$

DTFT – ***x*** : discreto (***n***) ***u*** : continuo

DFT – ***x*** : discreto (***n***) ***u*** : discreto (***k***)

6.3 FT de frecuencia discreta

La idea es encontrar las componentes de frecuencia de una señal periódica (o la señal que tiene componentes de frecuencia discretos)

$$\tilde{f}(x) \longrightarrow F[k]$$

- Transformada discreta: señal periódica
- Transformada no periódica: señal continua

6.3 FT de frecuencia discreta

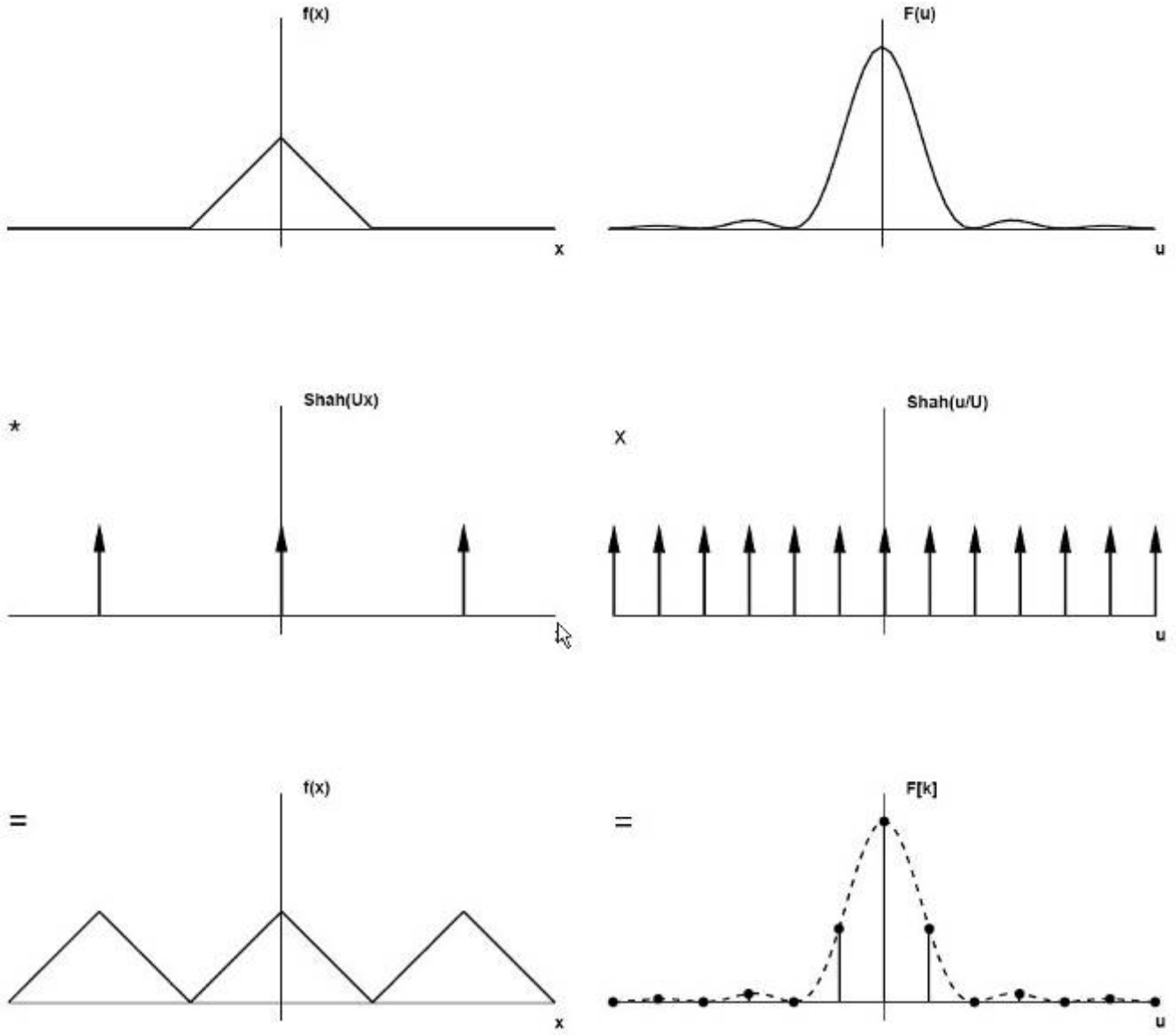
Empleando una función auxiliar limitada en el espacio

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & |x| < \frac{1}{2U} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2U} \end{cases}$$

con

$$f(x) \longrightarrow F(u)$$

6.3 FT de frecuencia discreta



6.3 FT de frecuencia discreta

Muestreando F(u)

$$F[k] = U\,F(kU).$$

$$\begin{aligned} F_s(u) &= \text{Ш}(u/U)F(u) \\ &= U \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(u)\delta(u - kU) \end{aligned}$$

6.3 FT de frecuencia discreta

Tomando la transformada inversa de $F_s(u)$

$$F_s(u) = U \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(u)\delta(u - kU)$$

$$\begin{aligned} f_s(x) &= U \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kU)\mathcal{F}^{-1}\{\delta(u - kU)\} \\ &= U \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kU)e^{i2\pi kUx} \end{aligned}$$

6.3 FT de frecuencia discreta

$$f_s(x) = U \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kU) e^{i2\pi kUx}$$

DFFT inversa

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{i2\pi kUx}$$

6.3 FT de frecuencia discreta

Dado que

$$F(u) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux}\, dx$$

es equivalente a

$$F(u) = \int_{0}^{1/U} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi ux}\, dx$$

6.3 FT de frecuencia discreta

pero

$$F[k] = UF(kU)$$

DFFT

$$F[k] = U \int_0^{1/U} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi kUx}\, dx$$

Resumen por dominios

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux}\, dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux}\, du$$

FT – ***x*** : continuo ***u*** : continuo

$$F[k] = U \int_{0}^{1/U} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi kUx}\, dx$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{i2\pi kUx}$$

DFFT – ***x*** : continuo ***u*** : discreto (***k***)

$$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i2\pi unT}$$

$$f[n] = T \int_{0}^{1/T} \tilde{F}(u) e^{i2\pi unT}\, du.$$

DTFT – ***x*** : discreto (***n***) ***u*** : continuo

DFT – ***x*** : discreto (***n***) ***u*** : discreto (***k***)

6.3 FT de frecuencia discreta

Equivalencia con las series de Fourier

Serie

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 x}$$

DFFT

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{i2\pi kUx}$$

$$C_k \equiv F[k] \qquad \omega_0 \equiv 2\pi U$$

6.3 FT de frecuencia discreta

Equivalencia con las series de Fourier

Serie

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{f}(x) e^{-ik\omega_0 x}\, dx$$

DFFT

$$F[k] = U\int_0^{1/U} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi kUx}\, dx$$

$$\frac{1}{T_0} \equiv U \qquad\qquad \omega_0 \equiv \frac{2\pi}{T_0}$$