Interrogación 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (6 pts.) **Análisis de sistemas.** Determine si los siguientes sistemas son causales, invariantes y lineales, pero solo justifique las características que **no** cumpla:

   (a) (2 pts.) $g(x) = \max\{f(x)\}$

   (b) (2 pts.) $g(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

   (c) (2 pts.) $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

   Solución:

   (a) El sistema es: **no** causal, invariante y **no** lineal.

   - No causal: Si el máximo esta en un $x_0 > x$ el sistema tomaría valores del futuro de la entrada → **1 pts.**
   - No lineal: Si dos entradas superpuestas con máximos ubicados en distintos valores de x se utilizan como entrada, la salida no será la suma de los máximos → **1 pts.**

   (b) El sistema es: **no** causal, invariante y lineal.

   - No causal: Las derivadas dependen tanto de $f(x^-)$ como de $f(x^+)$ para existir → **2 pts.**

   (c) El sistema es: **no** causal, **variante** y lineal.

   - No causal: Si $x < 0$ se utilizarán valores del futuro de la entrada debido que se integrará hasta 0 → **1 pts.**
   - Variante: Para una entrada $f(x-a)$ la salida quedará $\int_{-a}^{x-a} f(t)\,\mathrm{d}t$ que no es la salida desplazada (notar índice inferior de la integral) → **1 pts.**

   .

2. (5 pts.) **Sistema discreto.** Sea el sistema discreto LTI con respuesta al impulso $h[n] = a[n+1] \sqcap [n]$ con:

$$a[n] = \frac{1}{n(n+1)}$$

Encuentre la respuesta del sistema al escalón $y[n]$ en el infinito, es decir $\lim_{n\to\infty} y[n]$.

Solución:

Primero notamos que:

$$a[n] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego la respuesta del sistema será:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sqcap [n] * a[n+1] \sqcap [n] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a[k+1] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}} \end{aligned}$$

En el infinito la salida $y[n]$ será equivalente a:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

3. (6 pts.) **Sistema extraño.** Sea un sistema descrito por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(t-n)\, dt$$

¿Cuál será el valor de la derivada de la salida, si $f(x) = \text{Ш}(x)$?

Solución:

Como la funcion *sinc* tiene valor nulo para todo número entero excepto el origen, la suma de todos los *sinc* desplazados a saltos enteros generará una función que tiene valor uno para todo entero, como muestra la figura → **2 pts.**

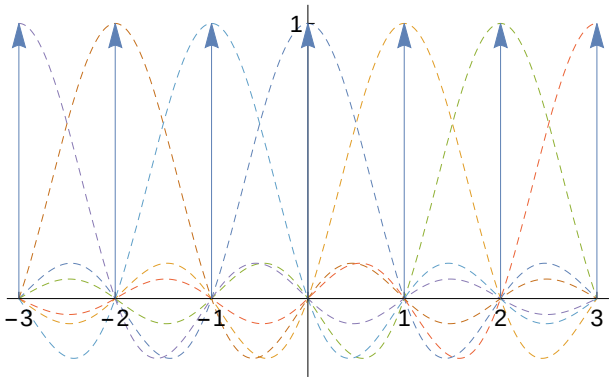


Figure 1: Solución gráfica de la multiplicación dentro de la integral.

La función $g(x)$ será equivalente a integrar dichos impulsos a lo largo de x, osea:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqcap(x-n) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Por lo tanto la derivada de $g(x)$ será la misma función *shah*:

$$\boxed{g'(x) = \text{Ш}(x)} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Nota: Es posible notar que la derivada de dicha integral tiene como resultado la expresión anterior y eso haría innecesario integrar/derivar para resolver el problema.

4. (8 pts.) **Filtro de audio.** Sea un filtro discreto causal definido por la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] + ay[n-1] = x[n] + x[n-1], \qquad 0 < a < 1$$

   (a) (2 pts.) Represente el sistema en un diagrama de bloques.

   (b) (6 pts.) Determine la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema usando el principio de superposición y grafique para $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ asumiendo $a = 1/2$.

Solución:

(a) El sistema representado en un diagrama de bloques es: → **2 pts.**

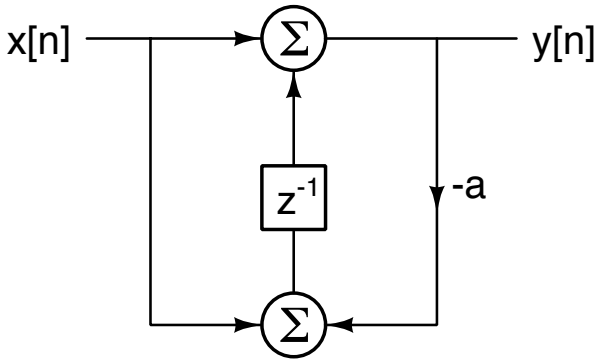


Figure 2: Diagrama de bloques simplificado.

(b) Utilizando principio de superposición se tiene que solo considerando el primer sumando de la expresión de entrada:

$$h_1[n] + ah_1[n-1] = \delta[n] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

n	0	1	2	3	4	5
$h_1[n]$	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$

Table 1: Respuesta al impulso h_1.

De lo que se deduce que:

$$h_1[n] = (-a)^n \sqcap[n] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Luego para el segundo sumando del lado derecho de la ecuación de diferencias:

$$h_2[n] + ah_2[n-1] = \delta[n-1] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

n	0	1	2	3	4	5
$h_1[n]$	0	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4

Table 2: Respuesta al impulso h_2.

Por lo tanto:

$$h_2[n] = (-a)^{n-1} \sqcap [n-1] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Finalmente, usando el principio de superposición $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$:

$$\boxed{h[n] = (-a)^n \sqcap [n] + (-a)^{n-1} \sqcap [n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Cuyo gráfico será: $\rightarrow$ **1 pts.**

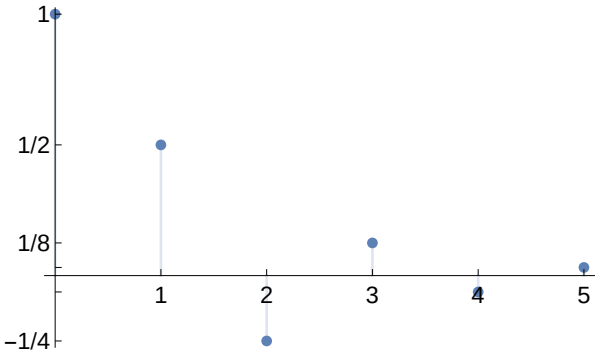
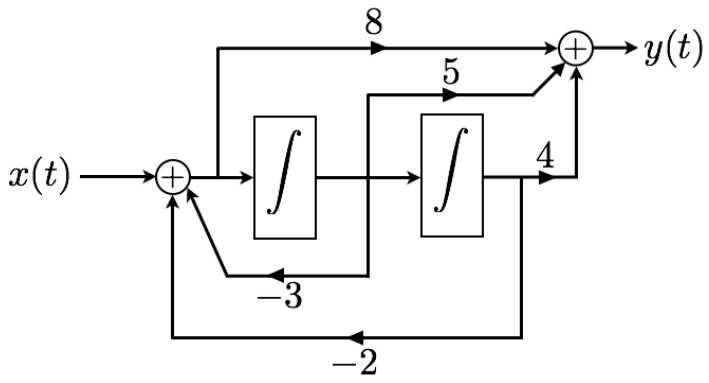


Figure 3: Respuesta al impulso.

5. (4 pts.) **Variables de estado.** Considere el siguiente diagrama de bloques:



Determine una representación del sistema en variables de estado utilizando las salidas de los integradores para describir el estado.

Solución:

Sea $v_1(t)$ la salida del integrador de la derecha y $v_2(t)$ la salida del integrador de la izquierda. Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$v_2'(t) = -3v_2(t) - 2v_1(t) + x(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$v_1'(t) = v_2(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$y(t) = 4v_1(t) + 5v_2(t) + 8v_2'(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Reemplazando la primera ecuación en la última, tenemos que

$$y(t) = 4v_1(t) + 5v_2(t) + -24v_2(t) - 16v_1(t) + 8x(t) = -12v_1(t) - 19v_2(t) + 8x(t)$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)}$$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -12 & -19 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + 8\mathbf{x}(t)}$$

$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$

6. (8 pts.) **Propiedades de convolución.**

   (a) (4 pts.) Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

   (b) (4 pts.) Sea la función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \sqcap\left(\frac{x}{2^{-n}}\right) * \wedge(x)$$

   ¿Cuál será el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Solución:

(a) Por definición se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,g(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Cambiando el orden de integración (teorema de Fubini):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,g(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,g(x-\xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}\end{aligned}$$

Con un cambio de variable $x' = x - \xi \rightarrow \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x$ se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} g(x')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x')\,\mathrm{d}x' \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Como la variable de integración es muda se concluye finalmente que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Para calcular el valor de dicha integral usamos propiedades de convolución y linealidad de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \sqcap\left(\frac{x}{2^{-n}}\right) * \wedge(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x}{2^{-n}}\right)\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \wedge(x)\,\mathrm{d}x \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego se tiene que el valor de cada término de dicha multiplicación es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x}{2^{-n}}\right)\mathrm{d}x = 2^{-n} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \wedge(x)\,\mathrm{d}x = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

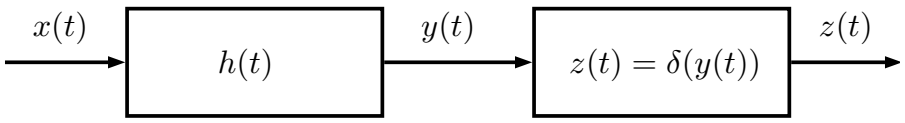
Por lo tanto, si resolvemos la sumatoria geométrica resultante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{-N}}{1-2^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = 1 - 2^{-N}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

7. (8 pts.) **Sistemas en cascada.** Sea un primer sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \cos(\pi t)$ que se conecta en cascada a un segundo sistema como se muestra a continuación: Determine la salida $z(t)$ si la entrada es $x(t) = \sqcap(t)$.



Solución:

Como el sistema inicial es LTI, la salida de este será la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso del mismo → **1 pts.** Luego la salida $z(t)$ puede ser reducida a:

$$z(t) = \delta(\sqcap(t) * \cos(\pi t)) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Ahora, para aplicar la propiedad del impulso de una función, se deben determinar los ceros de esta convolución:

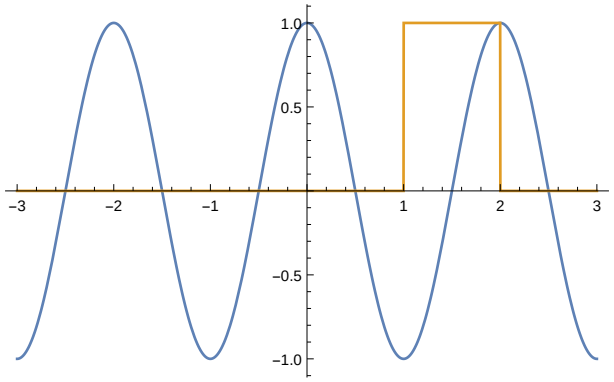


Figure 4: Convolución gráfica.

Notamos que para todo $t_k = 1/2 + k$ con $k \in \mathbb{Z}$ el valor de dicha convolución será nulo, entonces solo nos faltará encontrar el factor de escalamiento de cada impulso → **1 pts.** Por propiedades de convolución se tiene que:

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqcap(t) * \cos(\pi t))\right|_{t=t_k} = |2 \uparrow\downarrow (t) * \cos(\pi t)|_{t=t_k} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$2 \uparrow\downarrow (t) * \cos(\pi t) = \cos(\pi(t + 1/2)) - \cos(\pi(t - 1/2))$$

Usando propiedades de suma de cosenos

$$\cos(\pi(t + 1/2)) - \cos(\pi(t - 1/2)) = -2\sin(\pi t)$$

y evaluando en las raíces:

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|2\uparrow\downarrow(t)*\cos(\pi t)\right|\right|_{t=t_k} = \left|-2\sin(\pi t)\right|_{t=t_k}$$
$$= 2 \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Se tendrá finalmente que:

$$\boxed{z(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)=\frac{1}{2}\sqcup\left(t-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

8. (**BONUS** 6 pts.) **Impulso de una función.** Demuestre la propiedad del impulso de una función:

$$\delta\left(f\left(x\right)\right)=\sum_{n}\frac{\delta\left(x-x_{n}\right)}{\left|f'\left(x_{n}\right)\right|}$$

Hint: Puede usar, si así lo desea, series de Taylor.

Solución:

Primero que todo notamos que para $\delta\left(ax+b\right)$, o sea un delta desplazado con una contracción/dilatación temporal presenta una modificación en su magnitud:

$$\delta\left(ax+b\right)=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\sqcap\left(\frac{ax+b}{T}\right)\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{|a|}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

La magnitud entonces de un impulso con una función afín $f\left(x\right)=ax+b$ en su argumento, tendrá como módulo $1/|a|$, que resulta ser también $1/\left|f'\left(-b/a\right)\right|$. Así, la derivada de la función evaluada en el punto donde el argumento se hace cero (las raices) coincidirá con una modificación en "amplitud" del impulso $\rightarrow$ **2 pts.**

Ahora si tenemos $f\left(x\right)$ cualquiera, con N raíces en x_n se tendrá que cerca de ellas $f\left(x\right)\approx f\left(x_n\right)+f'\left(x_n\right)\left(x-x_n\right)\rightarrow$ **2 pts.** Luego aplicando el mismo concepto anterior, se tendrán N impulsos desplazados cada uno en la posición de una raíz, con magnitud relacionada con la derivada de la función en el punto, deduciendo entonces que:

$$\boxed{\delta\left(f\left(x\right)\right)=\sum_{n}\frac{\delta\left(x-x_{n}\right)}{\left|f'\left(x_{n}\right)\right|}}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$