Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo nueve hojas de apuntes (tres correspondientes a cada interrogación).
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (5 pts.) **Sistema discreto**[1]. Considere el sistema LTI discreto definido por

$$y[n] = x[n] - e^{-6p}x[n-6], \quad 0 < p < 1$$

   (a) (1 pt.) Determine la función de transferencia $H(z)$

   (b) (1 pt.) Dibuje el diagrama de polos y ceros de $H(z)$

   (c) (1 pt.) Encuentre una función de transferencia $G(z)$ tal que se pueda recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$

   (d) (1 pt.) Determine todas las posibles regiones de convergencia de $G(z)$ analizando estabilidad.

   (e) (1 pt.) Encuentre la respuesta al impulso $g[n]$ para el caso en que $G(z)$ es estable.

Solución:

(a) Llevando al dominio Z,

$$Y(z) = (1 - z^{-6}e^{-6p})X(z)$$

por lo que

$$\boxed{H(z) = (1 - z^{-6}e^{-6p})} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) $H(z)$ se puede reescribir como

$$H(z) = \frac{z^6 - e^{-6p}}{z^6}$$

Entonces, $H(z)$ tiene un polo séxtuple en el origen y los ceros están dados por la ecuación

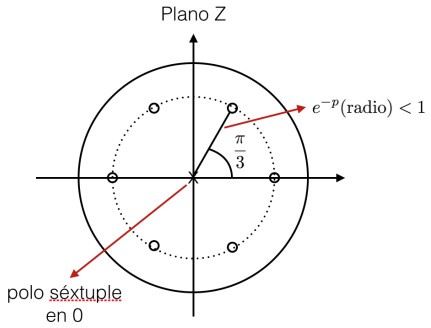
$$z^6 - e^{-6p} = 0$$

cuyas raíces son

[1] http://users.ece.utexas.edu/ jandrews/ee313/

$$e^{-p}e^{ik\pi/3}, \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

El diagrama de polos y ceros es



Como la señal es de duración finita, la ROC es todo el plano Z salvo el origen → **1 pts.**.

(c) Lo que buscamos es

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$$

es decir,

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{1 - z^{-6}e^{-6p}} = \frac{z^6}{z^6 - e^{-6p}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(d) En este caso, los polos están dados por las raíces del polinomio de sexto grado, hay dos posibles ROCs:

1. $|z| > e^{-p}$, en este caso el sistema sería estable
2. $|z| < e^{-p}$, en este caso el sistema sería inestable

→ **1 pts.**

(e) Para calcular la inversa consideremos la función,

$$r[n] \rightarrow R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-6p}}$$

entonces se tiene, por propiedades que

$$G(z) = R(z^6)$$

por lo que

$$g[n] = \begin{cases} r[\frac{n}{6}], & \text{para } n = 0, 6, 12, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir

$\boxed{g[n] = e^{-6pn} \sqcap [n]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$

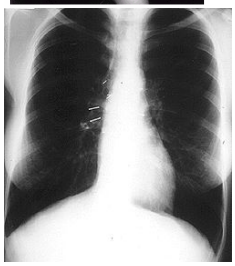
2. (5 pts.) **Mejoramiento de imágenes**[2]. Determine que tipo de filtro debe utilizarse en cada una de las imágenes a continuación para mejorar lo que se desea ver y explique brevemente como utilizarlo, los filtros que se pueden utilizar son pasabajos, pasaaltos, pasabanda y rechazabanda.



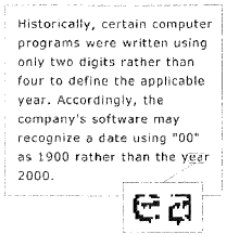
a) En esta imagen del polo norte lunar deseamos resaltar detalles en esta, como los cráteres.



b) En esta imagen de una persona de edad, deseamos disimular las arrugas de la cara.



c) En esta radiografía requerimos ver el detalle de los huesos para revisar posibles fracturas.



d) Tenemos un texto mal escaneado, donde las letras tienen algunas manchas que no siguen la forma del carácter.



e) En las fotografías transmitidas desde misiones espaciales es habitual encontrar ruido periodico (que es equivalente a multiplicar por una sinusoide) como el mostrado en la figura, deseamos recuperar una imagen donde pueda apreciarse bien el astronauta.

[2]Imagénes tomadas del libro *Digital Image Processing*, de Gonzalez y Woods

Solución:

a) Para la imagen del polo norte lunar, se puede tomar un filtro pasaaltos sobre la imagen que nos entregue los bordes de esta, y luego sumar los bordes sobre la imagen original para aumentar el detalle → **1 pts.**.

b) En este caso se puede aplicar un filtro pasabajos, de modo que se eliminen detalles pequeños como las arrugas → **1 pts.**.

c) Para poder ver el detalle de los huesos, se puede aplicar un filtro pasaaltos, de modo que se vean claramente los bordes de estos y las posibles fisuras o fracturas en ellos → **1 pts.**.

d) En el texto mal escaneado se puede aplicar un filtro pasabajos que elimine los detalles pequeños sin cambiar la forma a grandes rasgos del carácter → **1 pts.**.

e) En este caso el ruido periodico significa el espectro de la imagen original ha sido replicado en los puntos donde se encuentre la frecuencia de la sinusoide, esto se puede eliminar con un filtro rechazabanda → **1 pts.**.

3. (5 pts.) **Filtro FIR**. Considere un filtro FIR de orden 4 con respuesta de frecuencia $H(z)$ y su correspondiente respuesta al impulso $h[n]$.

   Considere además que una secuencia simétrica de largo $N+1$ cumple con

   $$h[n] = h[N-n], \;\; 0 \leq n \leq N$$

   y una antisimétrica de largo $N+1$ cumple con

   $$h[n] = -h[N-n], \;\; 0 \leq n \leq N$$

   Primero suponga que $h[n]$ es simétrica.

   a) Determine una expresión para $H(z)$.
   b) Determine la linealidad de la respuesta de fase.

   Suponga ahora que $h[n]$ es antisimétrica.

   c) Determine una expresión para $H(z)$.
   d) Determine la linealidad de la respuesta de fase.

Solución:

Como el filtro es de orden 4, entonces podemos escribir $H(z)$ como

$$H(z) = h[0] + \frac{h[1]}{z} + \frac{h[1]}{z^2} + \frac{h[1]}{z^3} + \frac{h[1]}{z^4}$$

o bien

$$H(z) = z^{-2}\left(h[0]z^2 + h[1]z + h[2] + h[3]z^{-1} + h[4]z^{-2}\right)$$

Por lo tanto, la respuesta de frecuencia se puede obtener al reemplazar z por $e^{i\omega n}$:

$$H(i\omega) = e^{-i2\omega n}\left(h[0]e^{i2\omega n} + h[1]e^{i\omega n} + h[2] + h[3]e^{-i\omega n} + h[4]e^{-i2\omega n}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(a) Al ser $h[n]$ simetrica entonces, $h[0] = h[4]$, y $h[1] = h[3]$, por lo tanto la respuesta de frecuencia se reduce a

$$H(i\omega) = e^{-i2\omega n}\left(h[0][e^{i2\omega n} + e^{-i2\omega n}] + h[2] + h[1][e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}]\right)$$

$$= \boxed{e^{-i2\omega n}\left(h[2] + 2h[1]\cos(\omega n) + 2h[0]\cos(2\omega n)\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) La respuesta de fase es

$$\angle H(i\omega) = -2\omega n$$

por lo tanto es lineal $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{1 pts.}}$.

(c) Al ser $h[n]$ antisimetrica entonces, $h[0] = -h[4]$, y $h[1] = -h[3]$ y $h[2] = 0$, por lo tanto la respuesta de frecuencia se reduce a

$$H(i\omega) = e^{-i2\omega n}\left(h[0][e^{i2\omega n} - e^{-i2\omega n}] + h[2] + h[1][e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}]\right)$$

$$= \boxed{2ie^{-i2\omega n}\left(h[1]\,\mathrm{sen}\,(\omega n) + h[0]\,\mathrm{sen}\,(2\omega n)\right)}$$

$$= \boxed{2e^{i(\frac{\pi}{2}-2\omega n)}\left(h[1]\,\mathrm{sen}\,(\omega n) + h[0]\,\mathrm{sen}\,(2\omega n)\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(d) La respuesta de fase es

$$\angle H(i\omega) = \frac{\pi}{2} - 2\omega n$$

por lo tanto es lineal $\rightarrow$ **1 pts.**.

4. (5 pts.) **Wavelets y chirp**. Se tiene la función $\text{chirp}(t) = e^{iat^2}$, cuyo escalograma calculado con el wavelet de Gabor $\psi(t) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(i\eta t)$ corresponde a:

$$\frac{|Wf(u,s)|^2}{s} = \sqrt{\frac{4\pi\sigma^2}{1+4s^2a^2\sigma^4}} \exp\left(\frac{-\sigma^2(\eta-2asu)^2}{1+4s^2a^2\sigma^4}\right)$$

   a) (2 pts.) A partir del escalograma determine la frecuencia angular instantánea del chirp, es decir aquella frecuencia $\omega(u) = \frac{\eta}{s}$, que produce un máximo en el escalograma para el tiempo u constante donde se está observando la señal.

   b) (3 pts.) Calcule la transformada de Fourier $F(u)$ del chirp y muestre que $|F(u)|^2$ es constante, ¿cómo se relaciona el que la energía del chirp esté distribuida de manera uniforme para todas las frecuencias con la frecuencia instantánea encontrada en la parte a?

Solución:

a) Dado que el escalograma corresponde a una función gaussiana, podemos notar que este es máximo cuando $\eta - 2asu = 0$, entonces tenemos que $\omega(u) = 2au$, que coincide con la frecuencia angular instantánea obtenida al derivar directamente la fase del chirp → **2 pts.**.

b) Usando el par de Fourier $\exp(-\pi t^2) \rightarrow \exp(-\pi u^2)$ junto a la propiedad de escalamiento, tenemos que la transformada de Fourier del chirp es:

$$F(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{i\pi^2u^2}{a}\right) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Donde se tiene que $|F(u)|^2 = \frac{\pi}{a} \rightarrow$ **1 pts.**.
Luego como en la frecuencia instantánea puede ser cualquier valor, dependiendo del tiempo en que se observe esta, se tiene que esto significa que la energía está repartida en todas las frecuencias como se ve al mirar la magnitud de la transformada de Fourier → **1 pts.**.

5. (5 pts.) **Igualdad**. ¿Qué condición o condiciones debe cumplir $f(x)$, cuya transformada de Fourier es $F(u)$, para que se cumpla la siguiente igualdad?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(u)\,du$$

Solución:

El teorema de la Energía establece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\,du$$

Para que $f^2(x)$ sea igual a $|f(x)|^2$ se debe tener que $\mathrm{Re}\{f(x)\} = 0$ o $\mathrm{Im}\{f(x)\} = 0 \rightarrow$ **1 pts.**. Lo mismo para $F(u)$. Es decir hay cuatro posibilidades (notando que $\mathrm{Im}\{F(u)\} = 0$ es lo mismo que $f(x)$ par):

(a) $f(x)$ real y par $\rightarrow$ **1 pts.**

(b) $f(x)$ real e impar $\rightarrow$ **1 pts.**

(c) $f(x)$ imaginaria y par $\rightarrow$ **1 pts.**

(d) $f(x)$ imaginaria e impar $\rightarrow$ **1 pts.**

6. (5 pts.) **Propiedades de sistema**[3]. Considere el sistema

$$\sum_{i=1}^{4} g[n-i] = \sum_{j=1}^{3} f\left[\frac{n}{2} - j\right]$$

Determine la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) (1 pt.) El sistema es no-lineal.

(b) (1 pt.) El sistema es invariante.

(c) (1 pt.) El sistema es no-causal.

(d) (1 pt.) El sistema tiene memoria.

(e) (1 pt.) El sistema es invertible.

Solución:

(a) Falso. El sistema es lineal → **1 pts.**

(b) Falso. El sistema es variante, ya que $\frac{k}{2}$ implica que no hay salida para k impar → **1 pts.**

(c) Verdadero. El sitema es no causal, basta con revisar el caso $k < 0$ → **1 pts.**

(d) Verdadero. El sistema involucra retrasos y por ende, tiene memoria → **1 pts.**

(e) Falso. El sistema no es invertible → **1 pts.**

[3] http://users.ece.utexas.edu/ jandrews/ee313/

7. (5 pts.) **Fourier 2D**[4]. Calcule la Transformada de Fourier 2-D de la siguiente función:

$$f(x,y) = e^{-\pi \frac{x^2+y^2+ix}{\sigma}}$$

con $\sigma > 0$

Solución:

$$e^{-\pi\left(\frac{x^2+y^2+ix}{\sigma}\right)} = e^{-\pi\frac{x^2}{\sigma}} e^{-\pi\frac{y^2}{\sigma}} e^{-\pi\frac{ix}{\sigma}}$$

$$= e^{-\pi\frac{x^2}{\sigma}} e^{-\pi\frac{y^2}{\sigma}} (\cos(\pi\frac{x}{\sigma}) - i\,\mathrm{sen}\,(\pi\frac{x}{\sigma}))$$

$$= e^{-\pi\frac{y^2}{\sigma}} e^{-\pi\frac{x^2}{\sigma}} \cos(\pi\frac{x}{\sigma}) - e^{-\pi\frac{y^2}{\sigma}} e^{-\pi\frac{x^2}{\sigma}} i\,\mathrm{sen}\,(\pi\frac{x}{\sigma}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

si consideramos las Transformadas de Fourier individuales se tiene $\rightarrow$ **1 pts.**:

$$e^{-\pi\frac{y^2}{\sigma}} \rightarrow \sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2 \sigma}$$

$$e^{-\pi\frac{x^2}{\sigma}} \rightarrow \sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi u^2 \sigma}$$

$$\cos(\pi\frac{x}{\sigma}) \rightarrow \sigma \uparrow\uparrow (\sigma u)$$

$$i\,\mathrm{sen}\,(\pi\frac{x}{\sigma}) \rightarrow -\sigma \uparrow\downarrow (\sigma u)$$

Resolviendo la Transformada de Fourier

$$\sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2 \sigma} \left(\sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi u^2 \sigma} * \sigma \uparrow\uparrow (\sigma u) + \sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\pi u^2 \sigma} * \sigma \uparrow\downarrow (\sigma u)\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$\sigma^2 e^{-\pi v^2 \sigma} e^{-\pi u^2 \sigma} * (\delta(\sigma u + 1/2) + \delta(\sigma u - 1/2) + \delta(\sigma u + 1/2) - \delta(\sigma u - 1/2))$$

$$\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$\sigma^2 e^{-\pi v^2 \sigma} e^{-\pi u^2 \sigma} * (2\delta(\sigma u + 1/2))$$

$$2\sigma e^{-\pi v^2 \sigma} e^{-\pi u^2 \sigma} * \delta(u + \frac{1}{2\sigma})$$

$$2\sigma e^{-\pi v^2 \sigma} e^{-\pi (u+\frac{1}{2\sigma})^2 \sigma} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

[4]Problema propuesto por un alumno del curso

8. (10 pts.) **Parseval y Riemman**. Considere una función real $f(x)$ cuya expansión en series de Fourier con coeficientes a_n, b_n es uniformemente convergente.

   (a) (5 pts.) Muestre la identidad de Parseval

   $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

   (b) (5 pts.) Dado

   $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$$

   utilice la identidad de Parseval anterior para calcular $\zeta(4)$, la función zeta de Riemann evaluada en 4. La función zeta de Riemman se define como

   $$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

Solución:

(a) La expansión en series de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $-\pi$ y π es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}\,(nx)] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

donde

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\text{sen}\,(nx)dx$$

Como $f(x)$ es real, entonces

$$[f(x)]^2 = f(x)f(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}\,(nx)]\right)^2 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

desarrollando,

$$= \frac{a_0^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}\,(nx)] + \left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]\right)^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}\,(nx)] + \left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)]\right)^2$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\text{sen}\,(nx) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

ahora integramos en el intervalo $-\pi, \pi$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0^2}{4}dx + a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\,\mathrm{sen}\,(nx)]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\right)^2 dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)]\right)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi}2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}\,(nx)dx]$$

Como las funciones seno y coseno son ortogonales,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{2\pi a_0^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,(nx)dx\right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^{\,2}(nx)dx + 2\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{sen}\,(nx)dx \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Las integrales de sen y cos en el intervalo $-\pi, \pi$ son cero. Además,

$$\cos(nx)\,\mathrm{sen}\,(nx) = \frac{1}{2}[\,\mathrm{sen}\,(2nx) + \,\mathrm{sen}\,(0)] = \frac{\mathrm{sen}\,(2nx)}{2}$$

Entonces,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2nx)}{2}dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2nx)}{2}dx$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,(2nx)}{2}dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2[\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2nx)\frac{1}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}] + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2[\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2nx)\frac{1}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}]$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n[\frac{-1}{2}\cos(2nx)\frac{1}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}]$$

Evaluando,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\pi$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Los coeficientes de la expansión en Fourier de x^2 en $-\pi, \pi$ son

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, b_n = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Reemplazando en la identidad de Parseval,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{4\pi^4}{9}\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Evaluando,

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{5}x^5\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

ahora,

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{5}\pi^5 - \frac{1}{\pi}\frac{1}{5} - \pi^5 = \frac{\pi^4}{5} + \frac{\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{5}$$

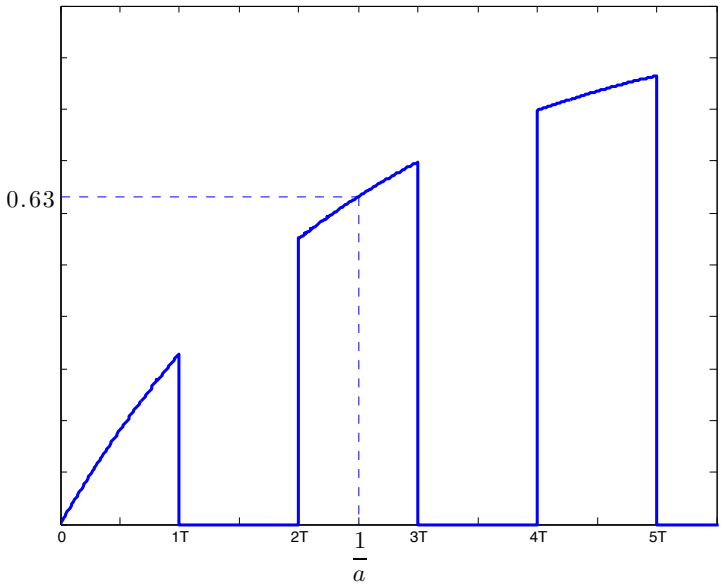
Reemplazando,

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Finalmente,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{18\pi^4 - 10\pi^4}{45 \times 16} = \boxed{\frac{\pi^4}{90}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

9. (5 pts.) **Osciloscopio malo**. Usted se dispone a probar su capacitor favorito, cuya curva de carga esta cada por $1 - e^{\frac{-at}{T}}$, en el laboratorio usando un osciloscopio. Sin embargo, un alumno descriteriado no lo usó como debía y lo dañó permanentemente, razón por la cual muestrea de una forma bastante particular, obteniendo una curva en el tiempo como la siguiente:



Calcule la Transformada de Laplace de esta señal en términos de T, suponiendo que el capacitor continúa cargándose hasta el fin de los tiempos.

Solución:

Sea $\alpha = a/T$, de la gráfica la curva original tiene la forma de carga

$$\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \sqcap (t)$$

con α por determinar. Luego, dado que en $t = 1/a$ la función vale $0.63 \approx 1 - e^{-1}$ tenemos entonces que:

$$1 - e^{-\alpha/a} = 1 - e^{-1} \rightarrow \frac{\alpha}{a} = 1 \rightarrow \alpha = a$$

Entonces $a/T = a$ y por lo tanto $T = 1$. $\rightarrow$ **1 pts.**

La señal medida por el osciloscopio es entonces la curva $\left(1 - e^{-at}\right) \sqcap (t)$ con a un coeficiente empírico que asumimos dado. Sin embargo, debemos agregar los pulsos cuadrados que se miden, lo cual se puede escribir como:

$$y(t) = \left(1 - e^{-at}\right) \left[\sqcap (t) - \sqcap (t - T) + \sqcap (t + 2T) - \sqcap (t - 3T) \cdots\right] \rightarrow$$ **1 pts.**

o en otras palabras,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(1-e^{-at}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sqcap(t-kT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sqcap(t-kT) - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-at}\sqcap(t-kT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sqcap(t-kT) - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-akT}e^{-a(t-kT)}\sqcap(t-kT) \end{aligned}$$

Llevar al dominio de Laplace expresado de esta forma es más sencillo. Asumiendo alternancia de operadores,

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-kTs}}{s} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-2akTs}}{s+a} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

donde el juego de transformadas $\sqcap(t-kT)$ converge para $\sigma > 0$ y $e^{-a(t-kT)}\sqcap(t-kT)$ convergen para $\sigma > -a$. Reconociendo las series geométricas:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-Ts}} - \frac{1}{s+a}\frac{1}{1+e^{-2aTs}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

donde como $a > 0$, entonces $\sigma > 0$. Finalmente, como $T = 1$:

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} - \frac{1}{s+a}\frac{1}{1+e^{-2as}}} \quad ; \quad \sigma > 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

10. (5 pts.) **Movimiento armónico amortiguado**. Considere la siguiente ecuación diferencial que describe un movimiento armónico amortiguado, sometido a una fuerza periódica externa:

$$x''(t) + \beta x'(t) + \omega^2 x(t) = F_0 \operatorname{sen}(\alpha t)$$

Encuentre la solución general y la solución cuando t crece, es decir, la solución periódica estable.

Solución:

La ecuación característica es

$$p^2 + \beta p + \omega^2 = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

cuyas raíces son

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Si $\beta < 2\omega$, la solución oscila dado que la parte compleja es no nula.

Entonces la solución homogénea es

$$x_h = \left(A_1 \cos(\frac{\sqrt{4\omega^2 - \beta^2}}{2} t) + A_2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{4\omega^2 - \beta^2}}{2} t) \right) e^{-\frac{\beta t}{2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para la solución particular (periódica), suponemos que es la forma

$$x_p = K_1 \cos(\alpha t) + K_2 \operatorname{sen}(\alpha t)$$

derivando y reemplazando en la ecuación

$$x_p = \frac{F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \beta^2} \left(-\alpha\beta \cos(\alpha t) + (\omega^2 - \alpha^2) \operatorname{sen}(\alpha t) \right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

La solución total es entonces

$$x = x_h + x_p$$

Cuando el tiempo crece, la solución tiende a la solución periódica $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{1 pts.}}$.

11. (5 pts.) **Energías**. Considere la señal $f[n] \longrightarrow F[k]$ par y discreta de largo N par y un sistema para el cual usted obtiene la siguiente respuesta a f:

$$g[n] = \left\{-\alpha f\left[\frac{N}{2}\right], -\alpha f\left[\frac{N}{2}+1\right], \ldots, -\alpha f[N-1], 0, \alpha f[1], \ldots, \alpha f\left[\frac{N}{2}-1\right]\right\} \rightarrow G[k].$$

¿Cuánto varía la energía de g con respecto a la de f?

Solución:

Tenemos que la energía de la señal viene dada por:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |g[k]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |G[k]|^2 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Asimismo, g puede escribirse como:

$$g[n] = \left\{-\alpha f\left[\frac{N}{2}\right], -\alpha f\left[\frac{N}{2}+1\right], \ldots, -\alpha f[N-1], -\alpha f[0], 0, \ldots, 0\right\}$$

$$+\left\{0, 0, \ldots, , \alpha f[0], \alpha f[1], \ldots, \alpha f\left[\frac{N}{2}-1\right]\right\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

digamos que la primera señal es g_1 y la segunda señal es g_2. Luego, la energía se escribe como:

$$N \sum_{k=0}^{N-1} |G[k]|^2 = N\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |G_1[k]|^2 + \sum_{k=N/2}^{N-1} |G_2[k]|^2\right] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

pero g_1 corresponden a los primeros $N/2$ términos de f adelantados en $N/2$ y multiplicados por $-\alpha$ y g_2 corresponde a los últimos $N/2$ términos de f con el mismo desplazamiento y multiplicados por α. Luego,

$$G_1[k] = -\alpha e^{i2\pi\left(\frac{N}{2}\right)/N} F[k] \quad \text{y} \quad G_2[k] = \alpha e^{i2\pi\left(\frac{N}{2}\right)/N} F[k] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Es decir,

$$N \sum_{k=0}^{N-1} |G[k]|^2 = \alpha^2 N \sum_{k=0}^{N-1} |F[k]|^2$$

con lo cual la energía se multiplica por α^2 veces $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.

12. (10 pts.) **Lazo realimentado**. Considere el lazo realimentado de la figura 12 (a) donde el sistema $G(s)$ puede escribirse como:

$$G(s) = K_0 \frac{e^{-Ls}}{T_0 s + 1}$$

Usted desea determinar los parámetros del sistema a través de un osciloscopio, llegando a las siguientes conclusiones:

- Al excitar el lazo cerrado con un escalón unitario se obtiene una respuesta en el largo plazo como la de la figura 12 (b).
- Luego, excita el mismo sistema $G(s)$ en lazo abierto con una entrada sinusoidal, obteniendo una respuesta en el largo plazo como la de la figura 12 (c).

A partir de esta información determine K_0, L y T_0.

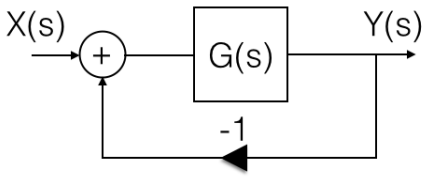


Fig 12 (a)

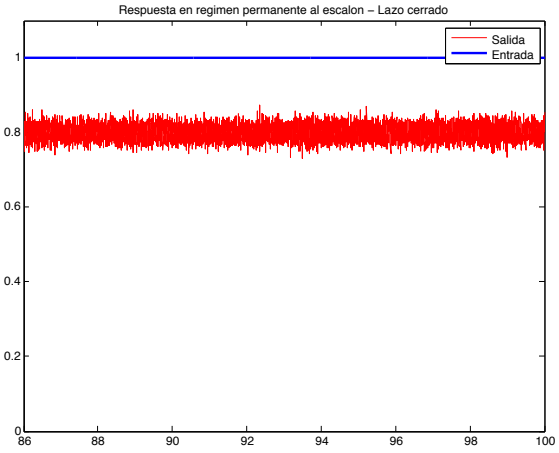


Fig 12 (b)

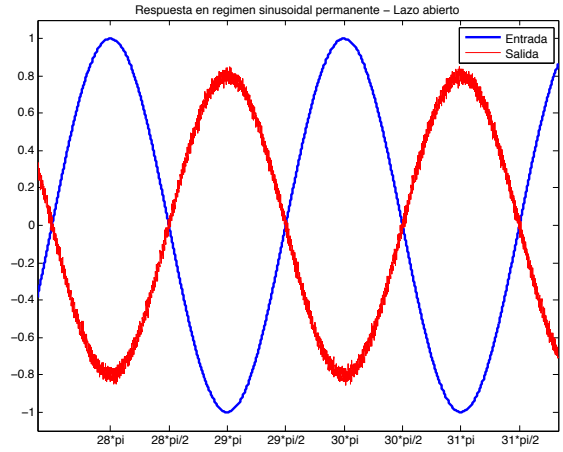


Fig 12 (c)

Solución:

La función de transferencia del sistema realimentado es:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Si la referencia es un escalón unitario, entonces $X(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$ **1 pts.**. Del primer gráfico tenemos prácticamente el valor final de la respuesta, por lo cual podemos usar el teorema del valor final, teniendo así que:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s)X(s) = \frac{G(0)K(0)}{1 + G(0)K(0)} = \frac{K_0}{K_0 + 1} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Del gráfico se observa que este valor es aproximadamente 0.8. Es decir,

$$\frac{K_0}{K_0 + 1} = \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{K_0 = 4} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Para el gráfico de lazo abierto se observa que estamos trabajando en régimen sinusoidal permanente, por lo cual si $s = \sigma + i2\pi u$ entonces el aporte de σ es solo al transiente y se desprecia, i.e. $s = i2\pi u$. En lazo abierto el sistema puede escribirse como:

$$G(s) = \frac{K_0}{\sqrt{(T_0 2\pi u)^2 + 1}} \angle - 2\pi u L - \arctan(T_0 2\pi u) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Del gráfico se observa claramente que el período de la sinusoidal es 2π, con lo cual $2\pi u = 1$ para la información del segundo gráfico $\rightarrow$ **1 pts.**. Asimismo, se observa que la caída de amplitud es de 1 a 0.8, con lo cual

$$\frac{K_0}{\sqrt{T_0^2 + 1}} = \frac{4}{5} \rightarrow T_0^2 = 24 \rightarrow \boxed{T_0 = 2\sqrt{6}} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Asimismo, el gráfico se observa que el desfase en el tiempo es de $\Delta t = \pi$ segundos en atraso, pero $\Delta\phi = 2\pi u \Delta t$, con lo cual

$$\Delta\phi = \pi \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Debe cumplirse entonces que:

$$-L - \arctan(T_0) = -\pi \rightarrow L + \arctan\left(2\sqrt{6}\right) = \pi \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Finalmente,

$$\boxed{L = \pi - \arctan\left(2\sqrt{6}\right)} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$