Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2007-2

INTERROGACION Nº 2

1. La función de autocorrelación de una señal $x(t)$ real se define como:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

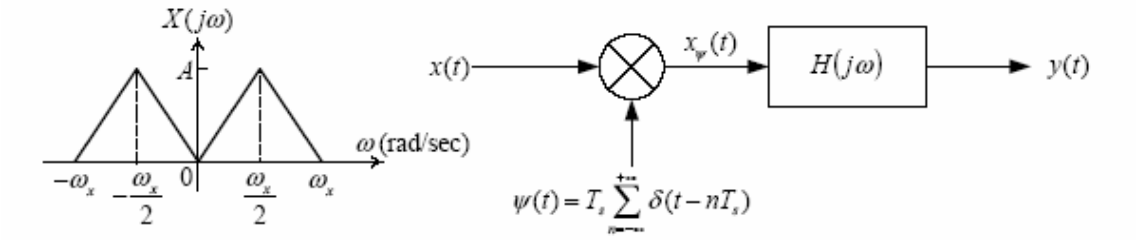
1.1 Deduzca una expresión para la Transformada de Fourier de $R_x(t)$.

1.2 Si $x(t)$ es la entrada a un sistema lineal e invariante de función respuesta al impulso $h(t)$, demuestre que la salida $y(t)$ satisface:

$$R_y(t) = R_x(t) * h(t) * h(-t)$$

1.3 Derive una expresión para la Transformada de Fourier de la autocorrelación $R_y(t)$ como función de las Transformadas de Fourier de $x(t)$ y $h(t)$.

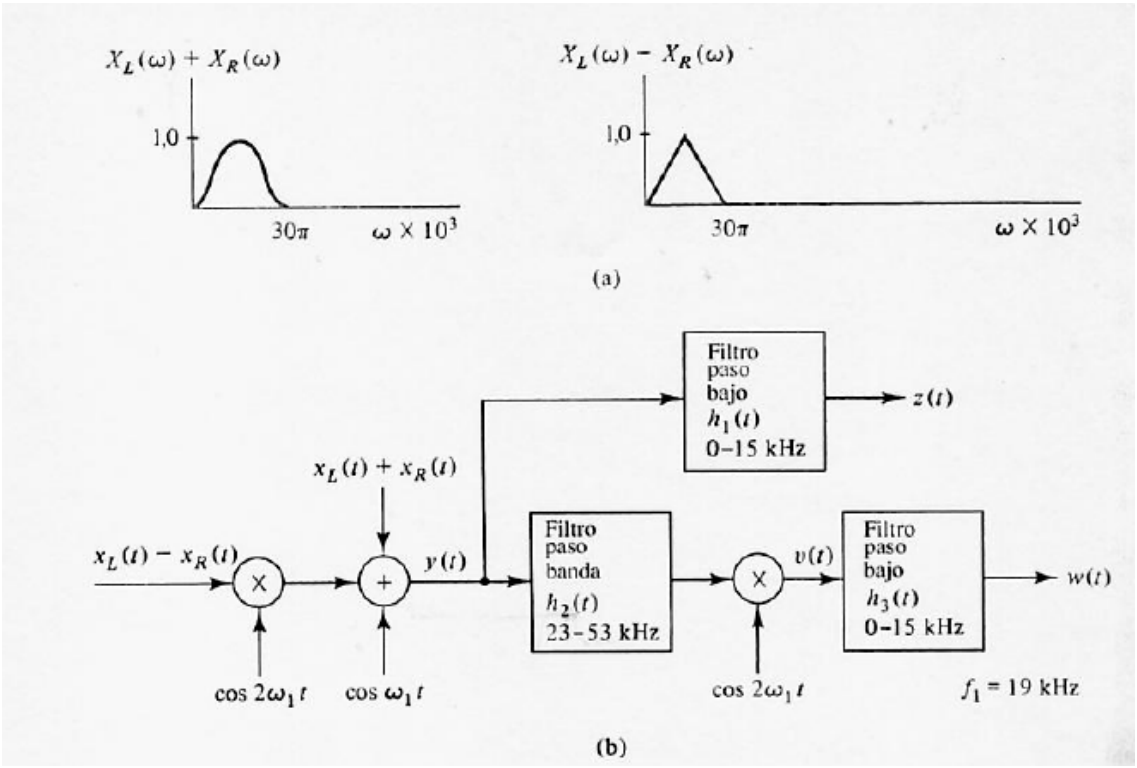
2. Considere el diagrama de bloques de la figura siguiente. Indique qué condiciones deben cumplirse para que sea posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de la señal $y(t)$. Justifique su resultado.



3. La figura muestra un esquema de multiplexión por división de frecuencia que genera la señal en banda base para radiodifusión FM estéreo. $x_L(t)$ indica la señal del parlante izquierdo y $x_R(t)$ la señal del parlante derecho. Se pide:

3.1 Dibujar los espectros de $y(t), z(t), v(t), w(t)$.

3.2 Indicar mediante un diagrama como recuperar las señales $x_L(t)$, $x_R(t)$. Justifique.



Observaciones

Tiempo: 2 horas.

En la interrogación está permitido utilizar material impreso.

Las aclaraciones de enunciado deben solicitarse en voz alta y sólo en los primeros 15 minutos. Pasado este tiempo no se aceptan más preguntas. Si considera que en alguna pregunta falta información, realice una suposición razonable que no se contradiga con el enunciado y déjelo claramente expresado en su respuesta.

Responda las preguntas en hojas separadas. No olvide colocar su nombre en cada hoja de respuesta.

Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2007-2

PAUTA INTERROGACION Nº 2

1. La función de autocorrelación de una señal $x(t)$ real se define como:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

1.1 Deduzca una expresión para la Transformada de Fourier de $R_x(t)$.

1.2 Si $x(t)$ es la entrada a un sistema lineal e invariante de función respuesta al impulso $h(t)$, demuestre que la salida $y(t)$ satisface:

$$R_y(t) = R_x(t) * h(t) * h(-t)$$

1.3 Derive una expresión para la Transformada de Fourier de la autocorrelación $R_y(t)$ como función de las Transformadas de Fourier de $x(t)$ y $h(t)$.

SOLUCIÓN

1.1

Se define la autocorrelación de $x(t)$ real como:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t+\tau)d\tau$$

Lo que se puede escribir como:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-(-\tau))d\tau$$

Teniendo en cuenta la expresión para la convolución de 2 señales:

$$y(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) z(t-\tau) d\tau$$

Se obtiene la expresión para la autocorrelación como:

$$R_x(t) = x(t) * x(-t)$$

Finalmente aplicando transformada de Fourier queda:

$$\Im\{R_x(t)\} = S_x(\omega) = X(j\omega)X(-j\omega) = \left|X(j\omega)\right|^2$$

1.2

La salida del sistema se puede escribir como la convolución de la entrada con la respuesta al impulso del sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Según lo demostrado en el punto 1.1, se puede considerar a la autocorrelación como un operador lineal. Luego aplicando autocorrelación a la ecuación anterior queda:

$$R_y(t) = x(t) * h(x) * x(-t) * h(-t)$$

Usando las propiedades de conmutatividad y asociatividad para la operación convolución, se tiene finalmente:

$$R_y(t) = R_x(t) * h(t) * h(-t)$$

1.3

Tomando transformada de Fourier a la expresión de la autocorrelación de la salida del sistema, obtenida en 1.2, se tiene:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) H(j\omega) H(-j\omega)$$

Reemplazando la expresión obtenida para la función $S_x(\omega)$ en 1.1 queda:

$$S_y(\omega) = X(j\omega)X(-j\omega)H(j\omega)H(-j\omega)$$

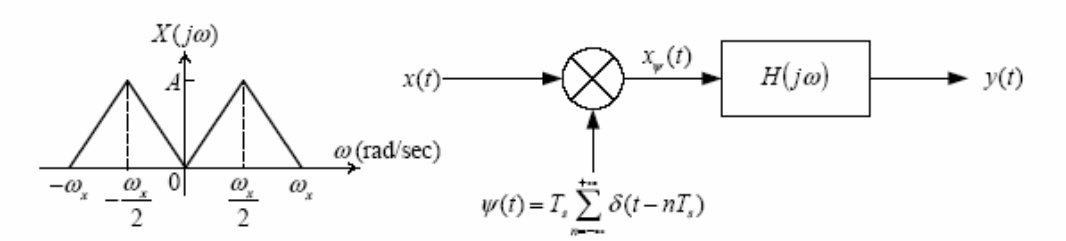
Que finalmente se puede escribir como:

$$S_y(\omega) = \left|X(j\omega)\right|^2 \left|H(j\omega)\right|^2$$

ASIGNACION DE PUNTAJE

2 puntos por cada apartado (1.1, 1.2, 1.3)

2. Considere el diagrama de bloques de la figura siguiente. Indique qué condiciones deben cumplirse para que sea posible recuperar la señal $x(t)$ a partir de la señal $y(t)$. Justifique su resultado.



SOLUCIÓN

Es inmediato que la expresión para la transformada de Fourier de la salida del sistema es:

$$Y(\omega) = H(j\omega)\sum_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

Para poder recuperar la señal original se requiere que el tren de impulsos cumpla con la condición de Nyquist (teorema del muestreo):

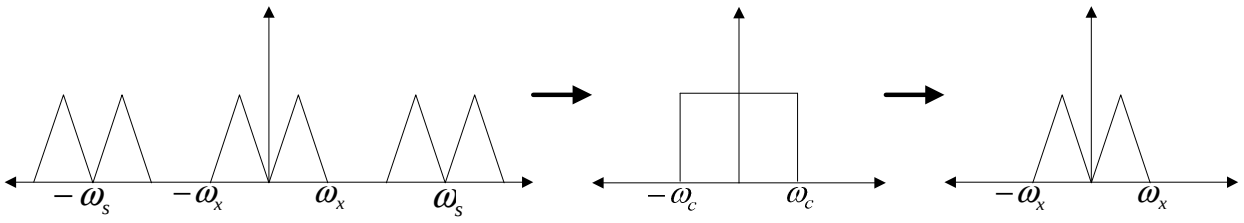
$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_x}$$

Particularmente en este caso, dada la forma del espectro de la señal original y considerando idealidad en las señales, se puede establecer la siguiente condición especial para la cual se puede recuperar la señal original (extra, sin puntaje asignado):

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_x}$$

El bloque cuya respuesta en frecuencia es $H(j\omega)$ puede ser: a) un filtro pasabajo o b) un canal con respuesta pasabanda. Luego es necesario analizar por separado cada caso.

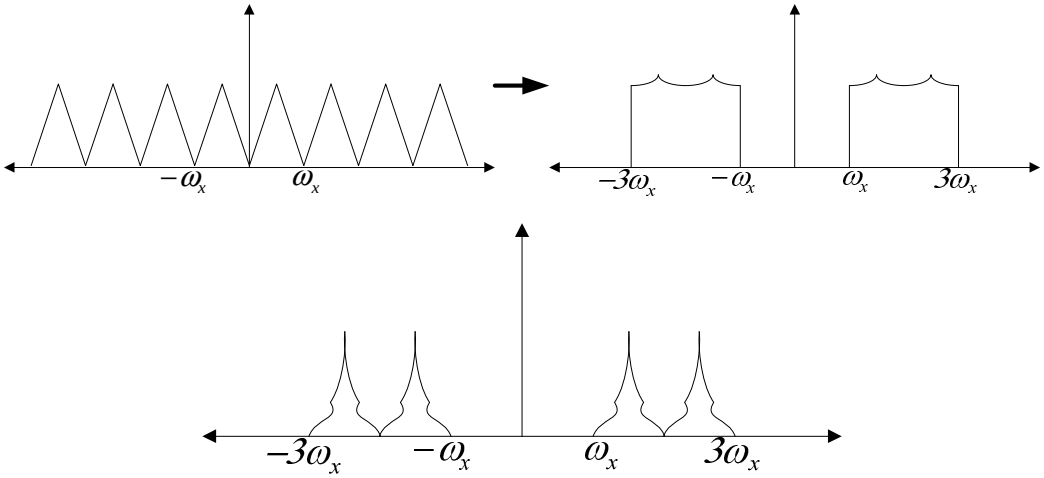
a) Si $H(j\omega)$ es un filtro se tiene lo siguiente:



Luego se debe cumplir que:

1. Frecuencia de corte mayor o igual a ω_x
2. Si se cumple $\omega_c \leq \omega_s - \omega_x$ se obtendrá la señal original. Si no se cumple se debe aplicar un nuevo filtro que cumpla: $\omega_x \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_x$

b) Si $H(j\omega)$ es un canal se tiene lo siguiente:



Luego se debe cumplir que:

1. El ancho de banda debe ser mayor o igual a $2\omega_x$.
2. Debe ser invertible, es decir, $H(j\omega)^{-1}$ debe estar definido en el rango de interés.
3. Para obtener la señal original se debe aplicar el inverso del canal, demodular y finalmente aplicar un filtro pasabajos que cumpla: $\omega_x \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_x$

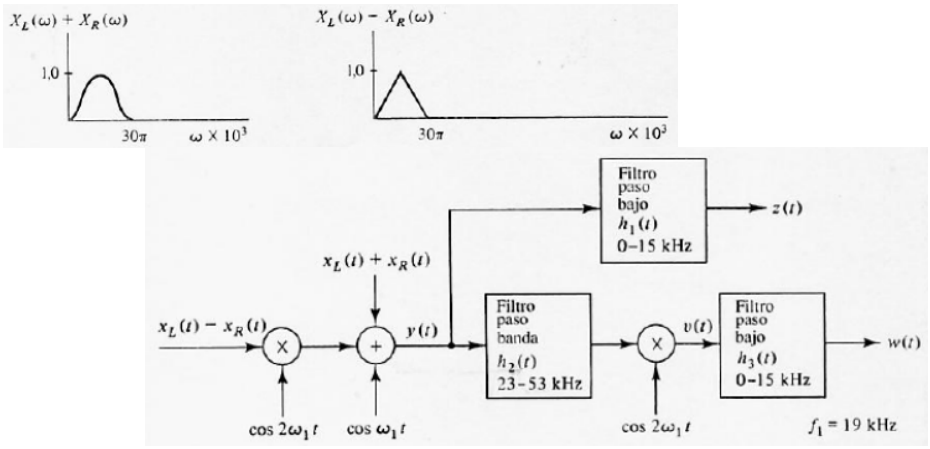
ASIGNACION DE PUNTAJE

Condición de Nyquist: 2 puntos
Condiciones sobre el filtro: 2 puntos
Condiciones sobre el canal: 2 puntos

3. La figura muestra un esquema de multiplexión por división de frecuencia que genera la señal en banda base para radiodifusión FM estéreo. $x_L(t)$ indica la señal del parlante izquierdo y $x_R(t)$ la señal del parlante derecho. Se pide:

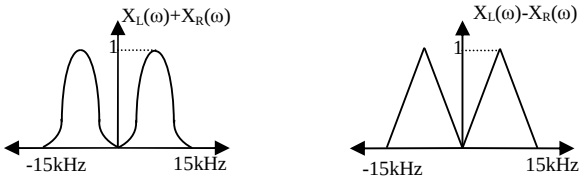
3.1 Dibujar los espectros de $y(t), z(t), v(t), w(t)$.

3.2 Indicar mediante un diagrama como recuperar las señales $x_L(t), x_R(t)$. Justifique.

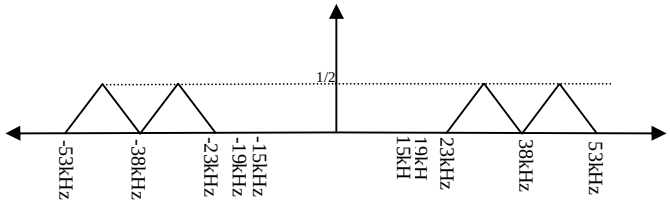


SOLUCION

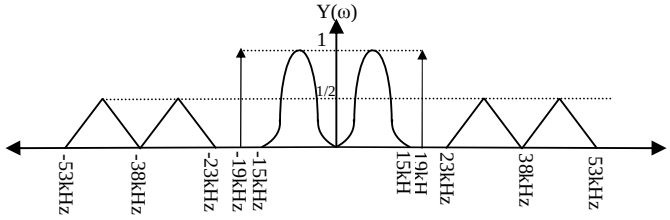
3.1 Dado que las señales provienen de sistemas reales, sus espectros son:



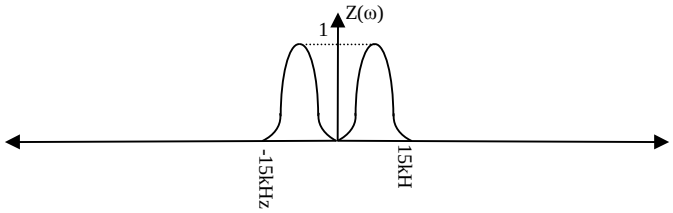
La señal después del primer multiplicador tiene el siguiente espectro:



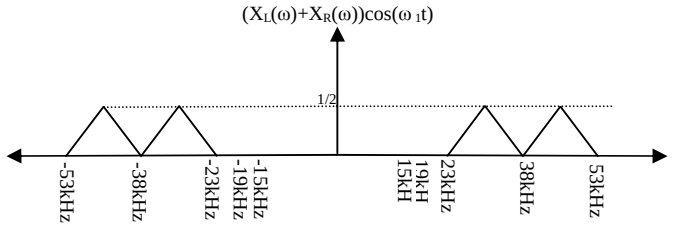
El espectro de la señal $y(t)$ corresponde a:



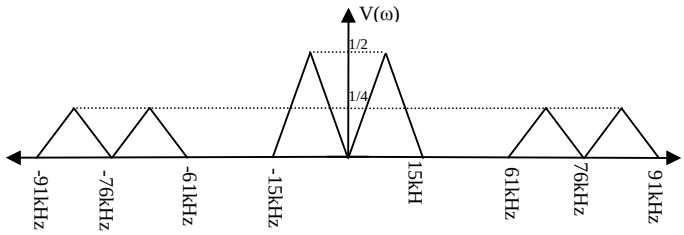
El espectro de la señal $z(t)$ proviene de eliminar el contenido sobre los 15 kHz en *Y(ω)*.



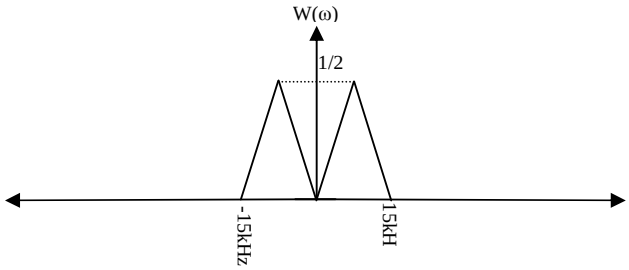
La señal filtrada mediante $h_2(t)$ tiene el siguiente espectro:



El espectro de la señal $v(t)$ corresponde a la demodulación de la señal anterior.



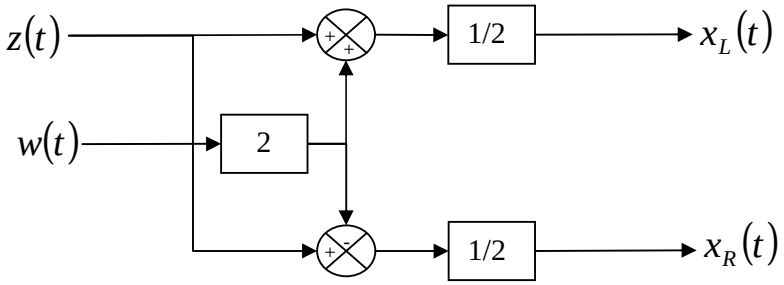
El espectro de $w(t)$ corresponde a V(ω), pero sólo con el contenido bajo los 15kHz.



3.2 Observamos que $z(t) = x_L(t) + x_R(t)$ y que $w(t) = \frac{1}{2}(x_L(t) - x_R(t))$, por lo tanto

$$x_L(t) = \frac{z(t) + 2w(t)}{2} \text{ y } x_R(t) = \frac{z(t) - 2w(t)}{2}.$$

El diagrama de bloques que describe a esta operación es:



ASIGNACION DE PUNTAJE

3.1: 1.25 puntos por cada gráfico bueno, total 5 puntos.
3.2: 1 punto.