Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 1–2011 — Vicente Parot

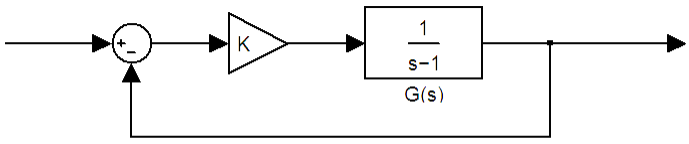
Documento #8

Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

Considere $\sqcap[0] = 1$. Puede usar las sumas geométricas $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$.

1. [6 ptos] **Laplace.** El sistema causal S_0, con función de transferencia $G(s) = \frac{1}{s-1}$, se incorpora a un sistema de control retroalimentado S_1, que se muestra en el diagrama de bloques:



Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del sistema S_1 y determine el valor de K para que S_1 sea estable.

Resultado: En el dominio de Laplace, sea $X(s)$ la entrada e $Y(s)$ la salida.

$$\begin{aligned}
(X(s) - Y(s))\, K \frac{1}{s-1} &= Y(s) \\
X(s)\frac{K}{s-1} &= Y(s) + Y(s)\frac{K}{s-1} \\
Y(s)\left(1 + \frac{K}{s-1}\right) &= X(s)\frac{K}{s-1} \\
H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{\frac{K}{s-1}}{\frac{s-1}{s-1} + \frac{K}{s-1}} \\
H(s) &= \frac{K}{s-1+K}
\end{aligned}$$

$H(s)$ tiene un único polo ubicado en $s - 1 + K = 0$, $s = 1 - K$. La estabilidad de S_1 se logra cuando $\mathrm{Re}\{K\} > 1$ es mayor que 1.

2. [6 ptos] **Matriz DFT**. Calcule la DFT de la k–ésima columna de la matriz de transformación DFT de $N \times N$ elementos.

   Resultado: Para no confundir con el dominio de la frecuencia, sea k_0 la columna y k el índice del resultado. La columna es una exponencial compleja,

$$f[n] = \frac{1}{N} e^{-i2\pi n k_0/N}$$

   Su transformada es

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT}\{f[n]\} = F[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-i2\pi n k_0/N} e^{-i2\pi n k/N} \\
F[k] &= \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi n (k+k_0)/N} \\
F[k] &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi n k/N}\right) *_l \delta[k+k_0] \\
F[k] &= \frac{1}{N}\delta[k] *_l \delta[k+k_0] \\
F[k] &= \frac{1}{N}\delta[k+k_0]
\end{aligned}$$

3. [6 ptos] **Auto.** Calcule la auto–convolución de la señal $\tilde{f}[n] = (\underline{1+i}, 1-i, -1-i, -1+i)$:

$$(\tilde{f} * \tilde{f})[n]$$

   Resultado: Una posibilidad es calcular según la definición de la convolución. Otra posibilidad es calcular la convolución como un producto en el dominio de la frecuencia. Para esto, se calcula la transformada de Fourier de f. Se puede calcular la parte real e imaginaria por separado, las propiedades de simetría también ayudan.

$$(\underline{1+i}, 1-i, -1-i, -1+i) \longrightarrow (\underline{0}, 0, 0, 1+i)$$

   Luego, usando la propiedad de convolución,

$$(\tilde{f} * \tilde{f})[n] \longrightarrow N\tilde{F}[k]\tilde{F}[k]$$

$$\tilde{F}^2[k] = (\underline{0}, 0, 0, 2i)$$

   Bastaría tomar la transformada inversa de $G[k] = 4\tilde{F}^2[k]$, lo que se puede hacer por definición:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}[n] &= \sum_{k=0}^{3} \tilde{G}[k] e^{i2\pi k n/4} \\
\tilde{g}[n] &= \tilde{G}[3] e^{i2\pi 3 n/4} \\
(\tilde{f} * \tilde{f})[n] &= 8i \cdot e^{-i\pi n/2}
\end{aligned}$$

4. [4 ptos] **Sistema discreto.** En la siguiente tabla se muestra un ejemplo de entrada $x_0[n]$ y salida $y_0[n]$ de un sistema discreto lineal e invariante. Encuentre la respuesta al impulso, una ecuación de diferencias que lo describa y su representación en diagrama de bloques.

n	$x_0[n]$	$y_0[n]$
-1	0	0
0	1	1
1	1	3/2
2	1	7/4
3	1	15/8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$2-1/(2^n)$

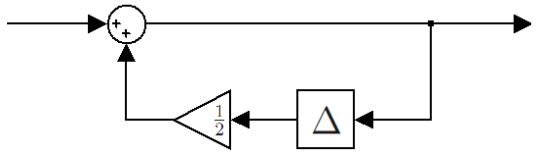
Resultado: Como $x_0[n]-x_0[n-1]$ es un impulso, entonces la respuesta al impulso (1 pto) se puede encontrar con $h[n]=y_0[n]-y_0[n-1]$.

$$h[n]=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots\right)=2^{-n}\sqcap[n]$$

La ecuación de diferencias (1 pto por convolución + 1 pto por ecuación de primer orden) se puede obtener con la convolución de la respuesta al impulso con una señal de entrada $x[n]$.

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]2^{-m}\sqcap[m] \\
y[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]2^{-m} \\
y[n] &= x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]+\dots \\
\frac{1}{2}y[n-1] &= \quad\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]+\dots \\
y[n]-\frac{1}{2}y[n-1] &= x[n] \\
y[n] &= \frac{1}{2}y[n-1]+x[n]
\end{aligned}$$

El diagrama de bloques (1 pto) del sistema discreto se puede hacer basado en la ecuación de diferencias. Usando un bloque con el sistema $\Delta g[n]=g[n-1]$ y multiplicación por una constante $\frac{1}{2}$:



5. [8 ptos] **Sistema discreto y DTFT.** La respuesta al impulso de un sistema discreto tiene DTFT

$$\tilde{F}(u) = \frac{b + e^{-i2\pi uT}}{1 - a \cdot e^{-i2\pi uT}}$$

con a y b reales distintos de cero.

a) Calcule la respuesta al impulso $h[n]$.

b) ¿Qué valores de a y b permiten que $h[n]$ sea sumable?

c) ¿Qué valores de a y b permiten que el sistema sea estable?

d) Encuentre la salida del sistema para entrada $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

Resultado: La respuesta al impulso se puede calcular formando la expresión de la DTFT directa con la suma geométrica.

$$\tilde{F}(u) = \frac{b + e^{-i2\pi uT}}{1 - a \cdot e^{-i2\pi uT}} = \left(b + e^{-i2\pi uT}\right) \frac{1}{1 - a \cdot e^{-i2\pi uT}}$$

$$\tilde{F}(u) = \left(b + e^{-i2\pi uT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i2\pi unT} = \left(b + e^{-i2\pi uT}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \sqcap[n] e^{-i2\pi unT}$$

$$\tilde{F}(u) = b \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \sqcap[n] e^{-i2\pi unT} + e^{-i2\pi uT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \sqcap[n] e^{-i2\pi unT}$$

$$\tilde{F}(u) = b \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \sqcap[n] e^{-i2\pi unT} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n-1} \sqcap[n-1] e^{-i2\pi unT}$$

$$\tilde{F}(u) = b \cdot \mathrm{DTFT}\left\{a^n \sqcap[n]\right\} + \mathrm{DTFT}\left\{a^{n-1} \sqcap[n-1]\right\}$$

$$h[n] = b \cdot a^n \sqcap[n] + a^{n-1} \sqcap[n-1]$$

$$h[n] = b + (b+1)\, a^{n-1} \sqcap[n-1]$$

La fórmula en si misma converge independiente del valor de b, sólo cuando $|a| < 1$ (1 pto). En este problema, $h[n]$ tiene DTFT, por lo que $h[n]$ es sumable, y $|a| > 1$ no es posible (1 pto). La estabilidad del sistema es otra forma de decir que $h[n]$ es sumable (2 ptos), las mismas condiciones aplican para a y b. La respuesta del sistema se puede averiguar por superposición de la respuesta al impulso.

$$y[n] = x[n] *_l h[n] = h[n] - h[n-1]$$

$$y[n] = b \cdot a^n \sqcap[n] + a^{n-1} \sqcap[n-1] - b \cdot a^{n-1} \sqcap[n-1] + a^{n-2} \sqcap[n-2]$$

$$y[n] = b \cdot a^0 \sqcap[0] + b \cdot a^{n-1} \sqcap[n-1] + a^1 \sqcap[1] + a^{n-2} \sqcap[n-2]$$

$$- b \cdot a^n - 1 \sqcap[n-1] + a^{n-2} \sqcap[n-2]$$

$$y[n] = a + b + 2a^{n-2} \sqcap[n-2]$$

6. [6 ptos] **Laplace.** Encuentre todas las funciones diferentes que tienen transformada de Laplace $F(s)$, indicando la respectiva región de convergencia.

$$F(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 - s - 2}$$

Resultado: Después de hacer una división larga para reducir el orden del numerador, y usando fracciones parciales, se tiene

$$F(s) = 1 + \frac{3}{s^2 - s - 2} = 1 + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

F(s) tiene dos polos ubicados en $s = -1$ y $s = 2$, que delimitan los tres intervalos posibles de región de convergencia. La transformada de Laplace de $\delta(t)$ converge para todo s.

- Para $\sigma < -1$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longrightarrow 1 \\ -e^{2t}\sqcap(-t) &\longrightarrow \frac{1}{s-2} \\ -e^{-t}\sqcap(-t) &\longrightarrow \frac{1}{s+1} \\ \delta(t) - (e^{2t} + e^{-t})\sqcap(-t) &\longrightarrow 1 + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} \qquad \sigma < -1 \end{aligned}$$

  y el par de transformadas es

- Similar para $-1 < \sigma < 2$,

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longrightarrow 1 \\ e^{2t}\sqcap(t) &\longrightarrow \frac{1}{s-2} \\ -e^{-t}\sqcap(-t) &\longrightarrow \frac{1}{s+1} \\ \delta(t) + e^{2t}\sqcap(t) - e^{-t}\sqcap(-t) &\longrightarrow 1 + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} \qquad -1 < \sigma < 2 \end{aligned}$$

- Para la región de convergencia $2 < \sigma$,

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longrightarrow 1 \\ e^{2t}\sqcap(t) &\longrightarrow \frac{1}{s-2} \\ e^{-t}\sqcap(t) &\longrightarrow \frac{1}{s+1} \\ \delta(t) + (e^{2t} + e^{-t})\sqcap(t) &\longrightarrow 1 + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} \qquad 2 < \sigma \end{aligned}$$