Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (a) [4 ptos] Se tiene un sistema cuya salida a la entrada $f(t)$ es $g(t) = \text{sgn}\{f(t)\}\sqrt{f^2(t)}$.
   i. Demuestre si el sistema es lineal o no.
   ii. Demuestre si el sistema es invariante o no.

   Resultado: Dado que $\text{sgn}\{f(t)\}\sqrt{f^2(t)}$ es idénticamente $f(t)$, se tiene que el sistema es $g(t) = f(t)$, por lo que trivialmente se tiene
   i. El sistema es lineal.
   ii. El sistema es invariante.

   (b) [4 ptos] Encuentre la transformada de Fourier de $f(x) = 2\sqcap(3-3x) - 1$.
   Resultado: Nótese que $\sqcap(3-3x) = \sqcap(1-x)$ y que por lo tanto

$$f(x) = 2\sqcap(3-3x) - 1 = -\text{sgn}(x-1)$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}x &\longrightarrow -\frac{i}{\pi u} \\ -\text{sgn}x &\longrightarrow \frac{i}{\pi u} \\ -\text{sgn}(x-1) &\longrightarrow \frac{i}{\pi u}e^{-i2\pi u} \end{aligned}$$

   (c) [4 ptos] La función de transferencia de un sistema discreto es $H(z)$. Se conoce el valor de $H(z)$ evaluada en el círculo unitario, y también se sabe que la región de convergencia es todo el plano (excepto $z = 0$).

$$H(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

   Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$.
   Resultado: Es conveniente expresar el coseno como suma de exponenciales

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

   Es decir,

$$H(e^{i\theta}) = \frac{1}{4}(2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

   de donde

$$H(z) = \frac{1}{4}(2 + z + z^{-1})$$

   cuya transformada Z inversa es

$$h[n] = \frac{1}{4}(1,\ \underline{2},\ 1)$$

2. (a) [4 ptos] Sea $f(x)$ una señal continua y periódica (de periodo $T = 1$) compuesta por una colección de impulsos. Cada periodo tiene N impulsos en posiciones al azar con una distribución uniforme, es decir, un periodo es

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \delta(x - \alpha_k) \quad \text{para } 0 < x < 1$$

con $\alpha_k \sim \mathrm{U}(0, 1)$ una variable aleatoria. Encuentre la transformada de Fourier de $f(x)$.
Resultado: Sea $g(x)$ el periodo, es decir, una función que es igual a $f(x)$ para $0 < x < 1$ e igual a cero fuera del periodo:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \delta(x - \alpha_k)$$

entonces

$$f(x) = \text{Ш}(x) * g(x)$$

$$g(x) \longrightarrow \sum_{k=1}^{N} e^{-i2\pi\alpha_k u}$$

y

$$\text{Ш}(x) * g(x) \longrightarrow \text{Ш}(u) \sum_{k=1}^{N} e^{-i2\pi\alpha_k u}$$

que se puede escribir más simplemente como

$$\begin{aligned} \text{Ш}(x) * g(x) \quad &\longrightarrow \quad \text{Ш}(u) \sum_{k=1}^{N} e^{-i2\pi\alpha_k u} \\ &\longrightarrow \quad \sum_{p} \delta(u - p) \sum_{k=1}^{N} e^{-i2\pi\alpha_k u} \\ &\longrightarrow \quad \sum_{p} \sum_{k=1}^{N} e^{-i2\pi\alpha_k p} \end{aligned}$$

(b) [4 ptos] Se sabe que la transformada de Fourier de $f(x)$ es $F(u) = \sqrt{u} - \sqrt{-u}$, ¿Cuánto vale $f(0)$?

Resultado: $F(u)$ es impar por lo que $f(0) = 0$. Más explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{u} - \sqrt{-u})\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u}\,du - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-u}\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u}\,du + \int_{\infty}^{-\infty} \sqrt{u}\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u}\,du - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u}\,du \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. (a) [4 ptos] Encuentre la DFT de largo N de

$$f[n] = \cos\frac{4\pi}{N}n$$

Resultado: Claramente $f[n]$ es la parte real de una de las bases de Fourier (la correspondiente a dos ciclos por N, por lo que su DFT será

$$F[k] = \frac{1}{2}(\delta[k-2] + \delta[k+2]) = \frac{1}{2}(\delta[k-2] + \delta[k-N+2])$$

(b) [4 ptos] Si la DFT de $(a\ b)$ es $(A\ B)$, ¿cuál es la DFT de $(a\ b\ a\ b\ a\ b\ a\ b)$?

Resultado: Aplicando la propiedad del estiramiento en el dominio de Fourier, la DFT pedida es

$$F[k] = (A\ 0\ 0\ 0\ B\ 0\ 0\ 0)$$

4. (a) [4 ptos] Encuentre la DFT de largo N (par) de $f[n] = a + (-1)^n b$.

Resultado:

$$f[n] = a + (-1)^n b = a1[n] + b(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ 1,\ -1)$$

$$a1[n] + b(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ 1,\ -1) \longrightarrow a\delta[k] + b\delta[k - N/2]$$

(b) [4 ptos] Sea $f[n] \longrightarrow F[k]$ una señal discreta de largo N, con N par. Si

$$\left\{ f[\frac{N}{2}],\ f[\frac{N}{2}+1], \cdots f[N-1],\ f[0],\ f[1], \cdots f[\frac{N}{2}-1] \right\} \longrightarrow F_2[k],$$

¿Cuánto vale

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |F[k]| - \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |F_2[k]| \ ?$$

Resultado: La segunda señal es igual a la primera con un desplazamiento de $N/2$, es decir,

$$f[n - N/2] \longrightarrow F_2[k] = e^{-i\pi Nk} F[k]$$

de donde

$$|F[k]| = |F_2[k]|$$

y

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |F[k]| - \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} |F_2[k]| = 0$$