Prueba 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y otros apuntes.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [16 ptos] **DFT de FFTSHIFT.** Si $f[n] \longrightarrow F[k]$, encuentre la DFT de `fftshift`{f[n]} = $(f_{N/2},\ f_{N/2+1},\ \cdots\ f_0,\ f_1,\ \cdots\ f_{N/2-1})$. Puede suponer N par.

   Resultado: La operación `fftshift` corresponde a un desplazamiento en $N/2$. Es decir,

   $$\texttt{fftshift}\{\text{f[n]}\} \longrightarrow e^{-i2\pi(N/2)(k/N)}F[k] = e^{-i\pi k}F[k]$$

   Pero $e^{-i\pi k}$ es un vector de unos y menos unos, así es que la transformada pedida es

   $$(F_0,\ -F_1,\ F_2,\ -F_3,\ \cdots - F_N)$$

2. [14 ptos] **Filtro de Wiener.** Se tiene una señal $f[n]$ que es degradada por un sistema de respuesta al impulso $h[n]$ y a la cual se le suma el ruido $r[n]$, una variable aleatoria de media cero,

   $$g[n] = h[n] * f[n] + r[n].$$

   Interesa recuperar $f[n]$ si se conoce $g[n]$ y $h[n]$. Para los efectos de este problema puede ignorar la aliasión en la convolución (suponiendo que hay suficientes ceros, por ejemplo), por lo que ésta puede ser lineal o cíclica. El filtro inverso que permite estimar $f[n]$ es

   $$\hat{F}_i[k] = \frac{1}{H[k]}G[k]$$

   y el filtro de Wiener aproximado es

   $$\hat{F_w}[k] = \left[\frac{H^*[k]}{|H[k]|^2 + A}\right] G[k]$$

   con A una constante.

   (a) [6 ptos] Explique qué ventaja tiene el filtro de Wiener respecto del filtro inverso.

   (b) [8 ptos] Si la suma de $h[n]$ es B, es decir $\sum h[n] = B$, cálcule cómo cambia la suma de las señales reconstruidas, $\sum f_i[n]$ y $\sum f_w[n]$, con respecto a la original, $\sum f[n]$. Se entiende que las sumas incluyen a todos los elementos del vector.

   Resultado:

   (a) Si sustituimos G por el modelo de degradación tenemos

   $$\hat{F}_i = \frac{1}{H}\left(NHF + R\right)) = NF + \frac{R}{H}$$

y

$$\hat{F_w} = \left[\frac{H^*}{|H|^2 + A}\right](NHF + R)) = \frac{H^*H}{|H|^2 + A}NF + \frac{H^*R}{|H|^2 + A} = \frac{N|H|^2}{|H|^2 + A}F + \frac{H^*R}{|H|^2 + A}$$

De estas expresiones se ve que si A es cero, el filtro de Wiener se reduce al filtro inverso. Nótese que en teoría ambos filtros reconstruyen la señal (excepto por un factor de amplificación trivial). El gran problema con el filtro inverso es la inestabilidad para los valores de k en que $H[k]$ se hace cero. Adicionalmente el ruido es dividido por H por lo que puede sufrir una amplificación no deseada. Por otro lado, el término A en el filtro de Wiener evita la división por cero y permite controlar la amplificación del ruido.

(b) La suma de los vectores es la DFT evaluada en el origen (multiplicado por N), por lo que

$$N\hat{F_i}[0] = N\left(NF[0] + \frac{R[0]}{H[0]}\right),$$

Dado que el ruido tiene media cero, su suma será también cero $R[0] = 0$. De manera que $N\hat{F_i}[0] = N^2F[0]$, es decir, la suma se multiplica por N.
Por otro lado, tenemos,

$$N\hat{F_w}[0] = \frac{N^2|H[0]|^2}{|H[0]|^2 + A}F[0]$$

De donde se resumen que el filtro inverso conseva el área (la suma), excepto por el factor N, y el de Wiener no, a menos que A sea cero.

3. [12 ptos] **Transformada de Chebyshev.** Se define la transformada de Chebyshev inversa, de frecuencia discreta, DFCT^{-1}, como

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]T_k(x) \qquad -1 \le x \le 1$$

donde $T_k(x)$ son los polinomios de Chebyshev definidos por

$$T_k(x) = \cos(k\cos^{-1}x).$$

Encuentre $F[k]$ para $f(x) = x$ $(-1 \le x \le 1)$.

Resultado: En primer lugar debemos saber qué forma tienen los polinomios de Chebyshev. Para $k = 0$, tenemos

$$T_0(x) = \cos(0\cos^{-1}x) = \cos(0) = 1$$

Y para $k = 1$,

$$T_1(x) = \cos(1\cos^{-1}x) = x$$

Es decir la señal que queremos expresar corresponde a una de las bases de Chebyshev, por lo que

$$F[1] = 1 \quad \text{y} \quad F[k] = 0 \quad \forall k \neq 1$$

4. [10 ptos] **Muestreo no uniforme.** Se desea conocer la transformada de Fourier de una señal muestreada en forma no uniforme. La señal es la sinusoide $f(x) = \cos \pi x$ y las muestras son tomadas en $x_j = (\cdots -1,\ -0.75,\ -0.5,\ 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 1,\ 1.25,\ 1.5,\ 2,\ 2.25,\ 2.5,\ 3 \cdots)$. Encuentre y grafique la transformada de Fourier de

$$g(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_j) \cos \pi x$$

Resultado: Para simplificar las operaciones vamos a expresar el muestreo como una multiplicación con $\sqcup\!\sqcup$. Para eso necesitamos buscar una combinación de impulsos uniformemente espaciados que sumen en las posiciones dadas. Por ejemplo, puede ser,

$$s(x) = 2\sqcup\!\sqcup(2x) + \sqcup\!\sqcup(x - 0.25)$$

Es decir

$$g(x) = (2\sqcup\!\sqcup(2x) + \sqcup\!\sqcup(x - 0.25)) \cos \pi x$$

Por lo que la transformada pedida es

$$G(u) = \sqcup\!\sqcup(u/2) * \uparrow\uparrow (u) + e^{-i\pi u/2} \sqcup\!\sqcup(u) * \uparrow\uparrow (u)$$

La primera convolución es

$$\frac{1}{2} \sqcup\!\sqcup(u + 0.5)$$

y la segunda es

$$\frac{1}{2} e^{-i\pi u/2} \sqcup\!\sqcup(u) * \delta(u + 0.5) + \frac{1}{2} e^{-i\pi u/2} \sqcup\!\sqcup(u) * \delta(u - 0.5)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\pi (u+0.5)/2} \sqcup\!\sqcup(u + 0.5) + \frac{1}{2} e^{-i\pi (u-0.5)/2} \sqcup\!\sqcup(u - 0.5)$$

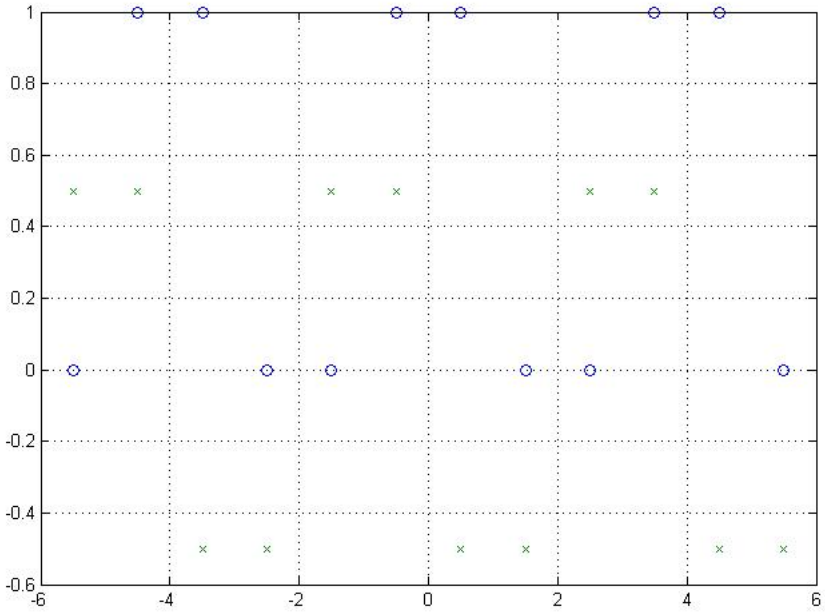
que se puede escribir como

$$\frac{1}{2} (e^{-i\pi (u+0.5)/2} + e^{-i\pi (u-0.5)/2}) \sqcup\!\sqcup(u + 0.5)$$

Por lo que

$$G(u) = \frac{1}{2} (1 + e^{-i\pi (u+0.5)/2} + e^{-i\pi (u-0.5)/2}) \sqcup\!\sqcup(u + 0.5)$$

Nótese que de evaluar esta función se tiene una serie de deltas con las siguientes amplitudes: $(1 - i)/2$, $(-1 - i)/2$, $(-1 + i)/2$ y $(1 + i)/2$, que se repiten periódicamente. Gráficamente estas amplitudes son (círculos para la parte real y cruces para la imaginaria):



5. [8 ptos] **Acolchamiento.** En este ejercicio compararemos la DFT de un vector que es acolchado de dos formas diferentes. Sea $f[n] = (\underline{a},\ b,\ c,\ d)$, el vector que es acolchado para producir:

$$f_1[n] = (\underline{a},\ b,\ 0,\ \cdots\ 0,\ c,\ d)$$

y

$$f_2[n] = (\underline{a},\ b,\ c,\ d,\ 0,\ \cdots\ 0)$$

ambos de largo $N > 4$. También suponga que se conocen las transformadas de largo N: $(\underline{a},\ b,\ 0,\ \cdots\ 0) \longrightarrow (A_0,\ A_1,\ \cdots A_{N-1})$ y $(\underline{c},\ d,\ 0,\ \cdots\ 0) \longrightarrow (C_0,\ C_1,\ \cdots C_{N-1})$. Encuentre

$$G[k] = \frac{F_1[k]}{F_2[k]},$$

en función de $A[k]$ y $C[k]$, e indique para qué valores de k, $G[k] = 1$. $F_1[k]$ es la DFT de $f_1[n]$ y $F_2[k]$ es la DFT de $f_2[n]$.

Resultado: En primer lugar notamos que

$$f_1[n] = p[n] + q[n+2] \quad \text{y} \quad f_2[n] = p[n] + q[n-2]$$

con

$$p[n] = (\underline{a},\ b,\ 0,\ \cdots\ 0) \longrightarrow A[k]$$

y

$$q[n] = (\underline{c},\ d,\ 0,\ \cdots\ 0) \longrightarrow C[k]$$

Con lo que sus transformadas son

$$F_1[k] = A[k] + e^{i4\pi k/N} C[k]$$

y

$$F_2[k] = A[k] + e^{-i4\pi k/N} C[k]$$

por lo que

$$G[k] = \frac{A[k] + e^{i4\pi k/N} C[k]}{A[k] + e^{-i4\pi k/N} C[k]}$$

$G[k]$ valdrá 1 cuando $e^{i4\pi k/N} = e^{-i4\pi k/N}$, lo que sucede para $k = 0$, $k = N/4$, $k = N/2$ y $k = 3N/4$.

6. [6 ptos] **Resonancia Magnética.** En la técnica de resonancia magnética para hacer imágenes médicas, la transformada de Fourier del objeto es representada por el voltaje en un cable. Es decir, se dispone de $F(u)$, la transformada de Fourier del objeto $f(x)$. Para encontrar el objeto, se muestrea $F(u)$ desde un $u_{\min}$ a un $u_{\max}$ y luego se toma la DFT inversa. Esboce el objeto que se encontraría bajo las siguientes condiciones:

   - Se toman 128 muestras desde $u = -63,5$ a $u = 63,5$ con espaciamiento uniforme, es decir, hay 64 muestras para $u > 0$ y 64 para $u < 0$ (no hay una muestra en $u = 0$).
   - La reconstrucción se realiza con el comando de Matlab
     `f = fftshift(ifft(fftshift(F)));`
     donde `F` es el vector con las muestras desde la correspondiente a $u = -63,5$ hasta la correspondiente a $u = 63,5$.
   - Suponga que el objeto es $f(x) = \sqcap(2x)$.

   Debe hacer un gráfico con la magnitud del vector reconstruido `f` y otro con su fase (indique la escala en ambos casos). Basta con dibujar la envolvente de los 128 puntos y no cada uno en particular.

   Resultado: Como el objeto es $f(x) = \sqcap(2x)$, entonces $F(u) = \frac{1}{2}\operatorname{sinc} u/2$. Si las muestras hubieran sido tomadas en las posiciones -64, -63, $\cdots$ 0, 1, $\cdots$ 62, 63, entonces la DFT sería directamente un rect centrado y de ancho 64. Pero como las muestras se tomaron con un desplazamiento de 1/2, se tiene que las muestras son

$$\text{Ш}(u - 1/2)\frac{1}{2}\operatorname{sinc} u/2$$

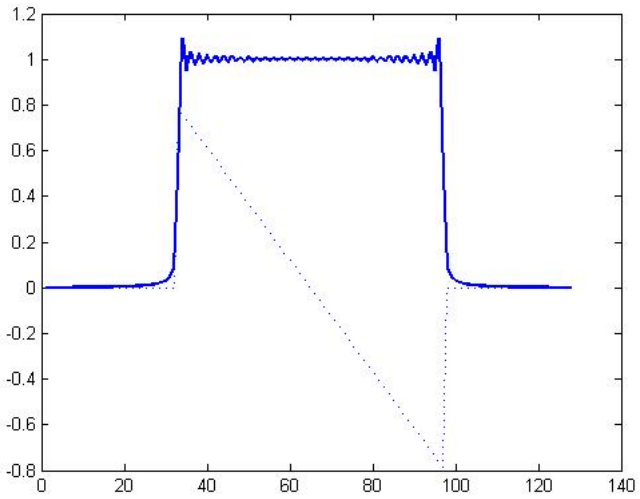
y que será interpretado por Matlab como

$$\text{Ш}(u)\frac{1}{2}\operatorname{sinc}(u + 1/2)/2$$

que tienen como transformada de Fourier

$$\text{Ш}(x) * e^{-i\pi x} \sqcap (2x)$$

Como $U = 1$ y $N = 128$, entonces $T = 1/128$, lo que significa que la señal reconstruida va de -1/2 a +1/2. En los extremos la fase será $\pi/2$ y $-\pi/2$, pero en los extremos del rect será $\pi/4$ y $-\pi/4$. El gráfico es el que sigue, donde la amplitud del rect es 1/128.


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
20
40
60
80
100
120
140