Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 4

Entrega: 22 de Noviembre a las 23:59 hrs.

Instrucciones generales

1. Para la parte de implementación, debe adjuntar un código desarrollado en Python (*.ipynb*).
2. Deben entregar un PDF con el desarrollo llamado *Apellido*_Tarea4.pdf (donde *Apellido* es su apellido).
3. La tarea es individual, pero pueden comentar las preguntas con sus compañeros.
4. Cada eje de los gráfico debe incluir un nombre descriptivo y su respectiva unidad.

Ejercicios Teóricos

1. Problemas cortos:

   a) **[1 punto]** Encuentre F(z), la transformada Z de f[n], en función de G(z), la transformada Z de g[n], sabiendo que se cumple la siguiente relación entre f[n] y g[n]:

   $$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$$

   b) **[0.5 puntos]** Encuentre la señal causal f[n], cuya transformada Z es:

   $$F(z) = \frac{3 - 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

   c) **[0.5 puntos]** Encuentre x[n] si:

   $$X(z) = ln(1 - z^{-1}) \qquad\qquad |z| > 1/2$$

   Hint: Puede serle útil usar la propiedad de la diferenciación de la transformada Z.

2. Se tiene un sistema discreto de entrada x[n] y salida y[n], definida por la ecuación de diferencias siguiente:

$$y[n-2] + 2y[n-1] + y[n] = x[n]$$

Si la entrada es x[n] = 2^nu[n] (u[0] = 1) y se sabe que y[-1] = y[-2] = 0.

a) **[0.25 puntos]** Evalúe y[n] directamente en la ecuación de diferencias para n = 0,1,2,3. Haga una tabla con sus resultados

b) **[0.25 puntos]** Encuentre Y(z), la transformada Z de y[n]

c) **[0.25 puntos]** Encuentre y[n] a partir de Y(z). Use fracciones parciales.

d) **[0.25 puntos]** Evalúe la respuestas encontrada en c) para los cuatro primeros términos. Compruebe que son los mismos valores obtenidos en a). Comente las ventajas y desventajas del método para encontrar y[n] usado en a) v/s el usado en c).

3. Demostraciones:

a) **[1 punto]** Considerando una función **impar** periódica $x[n]$ de período N y su respectiva DFT $X[k]$, demuestre que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]$$

b) **[1 punto]** Sea $x[n]$ una función discreta finita de largo N, y su respectiva transformada z $X[z]$. Se define $x_R[n]$ como la versión invertida en el tiempo de $x[n]$, con transformada z $X_R[z]$. Demuestre la siguiente relación:

$$X_R[z] = z^{1-N} X\left(\frac{1}{z}\right)$$

4. **[2 puntos]** Considere la señal discreta $x[n]$ definida a continuación:

$$x[n] = \begin{cases} n(a^n + b^n) & 0 \leq n < M \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde a, b son constantes reales tales que $|a| < 1$ y $|b| < 1$, y M es un entero positivo. Encuentre la transformada z $X[z]$ de $x[n]$. No olvide analizar la región de convergencia.

Ejercicios de Implementación

1. Problema de investigación:

a) **[1 punto]** Investigue y explique la relación que existe entre la ecuación de diferencias de un filtro, su función de transferencia y su respuesta de frecuencia. Se espera que su respuesta incluya una descripción matemática de la relación.

b) **[1 puntos]** Determine analíticamente la magnitud de la respuesta de frecuencia de un filtro con la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$$

c) **[1 punto]** Grafique la respuesta de frecuencia obtenida anteriormente para $f_s = 8000Hz$. ¿A qué tipo de filtro corresponde?

Recordatorios:

- Recuerden que el dominio de la respuesta de frecuencia está limitado por el criterio de Nyquist.
- La magnitud de la respuesta de frecuencia se tiene que graficar en dB.

2. Considere un filtro con la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[k] = 0,235x[k] - 0,417x[k-2] + 0,235x[k-4] - 0,345y[k-2] - 0,34y[k-4]$$

a) **[1 punto]** Utilice la tranformada Z para obtener la función de transferencia del filtro.

b) **[1.5 puntos]** Investigue sobre la función *freqz()* de scipy. Utilice esta función para graficar la magnitud y fase de la respuesta de frecuencia del filtro.
Recordatorios:

- El dominio de su gráfico debe ir de $\nu = 0$ a $\nu = 0.5$ (frecuencia reducida).
- Recuerden graficar la magnitud en dB.

c) **[1 punto]** Analice la respuesta de frecuencia de filtro. ¿A qué tipo de filtro corresponde? ¿Cuál es la frecuencia de corte del filtro (dependiendo del tipo de filtro este puede tener más de una)? ¿Cuál es el ancho de la banda pasante del filtro?

d) **[1.5 puntos]** Utilice la función *dimpulse()* de scipy para graficar la respuesta al impulso del filtro.

3. **[Bonus]** El ruido aditivo blanco gaussiano (AWGN, por sus siglas en inglés) es una señal estocástica que está presente en muchas aplicaciones de la ingeniería eléctrica. A continuación, obtendrá información sobre esta señal aplicando los conocimientos del curso:

a) **[0.25 puntos]** Investigue sobre las principales características del AWGN. Mencione al menos dos ámbitos de la ingeniería donde es relevante considerar este tipo de ruido.

b) **[0.5 puntos]** Para tener una realización de ruido AWGN, genere un *script* en Python que entregue una secuencia de N números aleatorios con distribución gaussiana con media 0 y varianza igual a 1. Grafique una realización del ruido para $N = 1000$.

c) **[0.25 puntos]** Investigue y explique la relación entre autocorrelación y densidad espectral de potencia para señales estocásticas.

d) **[0.5 puntos]** La autocorrelación de una señal discreta se define como:

$$R[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[m-n]$$

Por otro lado, la densidad espectral de potencia ($S[k]$) se define como:

$$S[k] = DFT\{R[n]\}$$

Exprese la autocorrelación como una convolución. Luego, exprese $S[k]$ como una función de la DFT de la señal $x[n]$.

e) **[0.5 puntos]** Para calcular $S[k]$ usando el resultado del ítem anterior, se necesita determinar la DFT de $x[n]$. Para lograr esto último, genere una función en *Python* que calcule la DFT de una señal discreta de largo N. (No pueden usar funciones de librerías que calculan directamente la DFT).

f) **[0.5 puntos]** Considerando $x[n]$ como una secuencia de AWGN con largo N y una tasa de muestreo igual a 0.1 segundos, grafique la densidad espectral de potencia de esta señal estocástica para los casos $N = 10,\ 100$ y 1000. Para lograr lo pedido, ocupe las funciones y resultados obtenidos en los ítems anteriores. ¿Por qué se llama ruido **blanco** gaussiano?

g) **[0.5 puntos]** Utilizando propiedades de la DFT, obtenga y grafique la autocorrelación del ruido AWGN para los distintos valores de N pedidos en *f*). ¿A qué señal conocida se parece $R[n]$ a medida que N aumenta?