Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

# Ayudantía 11

2 de Junio 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

## Pregunta 1

Se tiene la señal:

$$f(t) = 4 + 2\cos(150\pi t + \pi/3) + 4\sin(350\pi t)$$

### a)

La señal $f(t)$ se muestrea a 200 Hz para obtener $f[n]$. Encuentre $f[n]$, su DTFT y los componentes de frecuencia aliados.

Esta señal tiene componentes de frecuencia de 75 Hz y 175 Hz y el período de muestreo es de 0.005 [s]. Dado que $f[n] = f(nT)$ por lo tanto:

$$f[n] = 4 + 2\cos(0.75\pi n + \pi/3) + 4\sin(1.75\pi n)$$

Notar que $f_{alias} = f_s - f_B = 0.25$:

$$f[n] = 4 + 2\cos(0.75\pi n + \pi/3) - 4\sin(0.25\pi n)$$

La transforamda es:

$$F(\omega) = 8\pi\delta(\omega) + 2\pi e^{i\pi/3}\delta(\omega - 0.75\pi) + 2\pi e^{i\pi/3}\delta(\omega + 0.75\pi) + i4\pi\delta(\omega - 0.25\pi) + i4\pi\delta(\omega + 0.25\pi)$$

### b)

Suponga ahora que usa un interpolador a 200 Hz que reconstruye la señal.

Usamos $n = tF_s$:

$$f(t) = 4 + 2\cos(0.75\pi(200t) + \pi/3) - 4\sin(0.25\pi(200t))$$

$$f(t) = 4 + 2\cos(150\pi t + \pi/3) + 4\sin(25\pi t)$$

# Pregunta 2

Pedrito tiene una función discreta y periódica preferida $\tilde{f}[n]$ de largo N. Sin querer, jugando con ella se da cuenta que su señal cumple con:

$$\frac{1}{2}\tilde{f}[n]\text{Ш}[n/2] - \frac{1}{2}\tilde{f}[n]\text{Ш}[(n-1)/2] \xrightarrow{DFT} \tilde{F}[k - N/2]$$

## a)

Reescriba la propiedad de forma más sencilla.

Esto es lo mismo que:

$$(-1)^n \tilde{f}[n] \xrightarrow{DFT} \tilde{F}[k - N/2]$$

## b)

Muestre que se cumple para todas las señales.

Es cosa de notar que $(-1)^n = e^{i\pi n}$ tal que:

$$e^{i\pi n} \tilde{f}[n] \xrightarrow{DFT} \tilde{F}[k - N/2]$$

Es un desfase en frecuencia.

## c)

La función de Pedrito era $\tilde{f}[n] = [\underline{1}, -1, 0, 0]$ calcule el valor de $\tilde{F}[k - N/2]$.

$$\tilde{F}[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1-i & 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\tilde{F}[k - N/2]$ es:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

# Pregunta 3

Calcule las siguientes DFT:

## a)

(1,-1)

$$\tilde{F}[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (0, 1)$$

## b)

(-1,1)

Notamos que es la misma función que a) pero $\tilde{f}[n - N/2]$ por lo que su transformada será:

$$(0, 1)(-1)^n = (0, -1)$$

## c)

(1,1,0,0)

Usamos $W_4$ pero solamente nos importan las primeras dos columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & ... \\ 1 & -i & ... & ... \\ 1 & -1 & ... & ... \\ 1 & i & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - i \\ 0 \\ 1 + i \end{bmatrix}$$

## d)

(1,0,-1,0)
Dado que es la misma señal que en a) pero con ceros entre cada muestra, sabemos que el espectro simplemente se replica:

$$(0, 1, 0, 1)$$

# Pregunta 4

Se tiene una función $\tilde{f}(t)$ y su transformada $F[k]$ definidas como:

$$\tilde{f}(x) = \frac{(x-\pi)^2}{2},\ x \in [0, 2\pi] \qquad F[k] = \frac{\pi^2}{6}\delta[k] + \frac{1+\delta[k]}{k^2}$$

Calcule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

Por Parseval:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{(x-\pi)^2}{2}\right|^2 dx$$

Es equivalente a:

$$\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(x-\pi)^4}{4}dx$$

Despejando es sencillo ver que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$