Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

INTERROGACION Nº 3

1. Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de las señales:

1.1 $x_1(n) = |sen(1.5\pi m)|$

1.2 $x_2(n) = |sen(1.5n)|$

Analice cada señal e indique claramente los pasos seguidos en su desarrollo.

2. Considere un sistema cuya respuesta en frecuencia, con a, b y c reales, está dada por:

$$H(\Omega) = \frac{1 + ae^{-j\Omega} + be^{-j2\Omega}}{c + ae^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}}$$

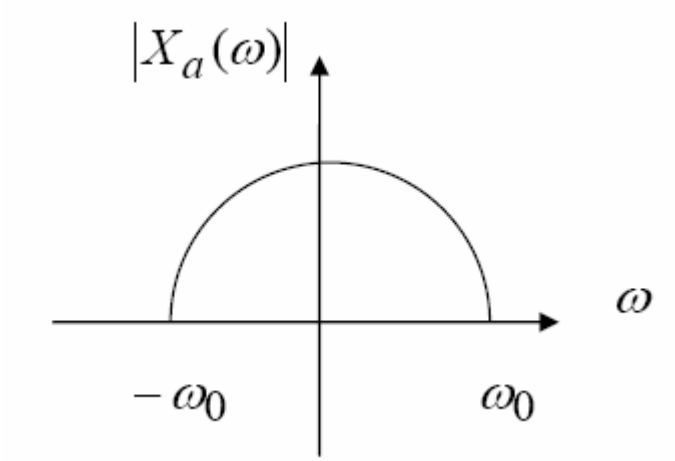
2.1 Obtenga la expresión general de la ecuación en diferencia que satisface el sistema.

2.2 Analice la causalidad y la estabilidad del sistema.

2.3 Para el caso $c = b$, grafique la amplitud del espectro de $H(\Omega)$. Justifique.

2.4 Que implicancia práctica tiene el resultado obtenido en 2.3?

3. La amplitud del espectro de una señal analógica corresponde a la mostrada en la figura, en la cual $\omega_0 = 100\ rad/seg.$



3.1 Dibuje la amplitud del espectro de la señal muestreada con un periodo de muestreo $T = 2\pi \; mseg.$

3.2 Se desea submuestrear la señal con un periodo de muestreo MT . Cuál es el máximo valor de M tal que se satisface el Teorema del Muestreo?

3.3 Dibuje la amplitud del espectro de la señal muestreada con periodo $T_1 = 4T$.

3.4 Dibuje la amplitud del espectro que se obtiene al interpolar la señal resultante de 3.3, empleando una frecuencia de muestro $\omega_S = 75 \; rad / seg.$

3.5 Repita el desarrollo 3.1 a 3.4 empleando herramientas computacionales. Compare con el análisis anterior y explique posibles diferencias.

Observaciones

Tiempo 2 horas. No se aceptan consultas; en caso que tenga dudas sobre alguna pregunta, responda indicando claramente las suposiciones que hace. Puede utilizar apuntes pero no calculadora. Responda cada pregunta en hojas separadas. No olvide indicar su nombre en cada hoja. Durante la interrogación debe entregar las respuestas 1, 2 y 3.1 a 3.4. La respuesta 3.5 debe entregarse el Lunes 13, a más tardar a las 10 horas, en la secretaría del DIE; si desea, puede entregar también las respuestas 3.1 a 3.4 revisadas. Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

PAUTA INTERROGACION N° 3

PREGUNTA 1

1. Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de las señales:

1.1 $x_1(n) = |sen(1.5\pi n)|$

1.2 $x_2(n) = |sen(1.5n)|$

Analice cada señal e indique claramente los pasos seguidos en su desarrollo.

Solución

1.1 Máximo 3 puntos

Para que la señal sea periódica se debe cumplir que:

$$x_1(n+N) = x_1(n)$$
$$|sen(1.5\pi(n+N))| = |sen(1.5\pi n + 1.5\pi N))|$$

Se sabe que:

$$sen(x) = -sen(x+\pi)$$

Como se tiene el modulo de sen() entonces:

$$1.5\pi N = \lambda\pi$$
$$N = \frac{2}{3}\lambda \qquad \lambda \text{ Entero}$$

El menor λ tal que N sea entero es: $\lambda = 3 \rightarrow N = 2$

Por lo que el periodo de la señal es 2 (1.5 puntos).

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\exp[{}^{-\,j2\pi kn}\!/_{N}]$$

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1} x_1(n)\exp[-j\pi kn]$$

$$a_k = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_1(1)\exp[-j\pi k])$$

$$a_k = \frac{1}{2}sen(1.5\pi)\exp[-j\pi k]$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2}$$

(1 punto)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp[{}^{j2\pi kn}\!/_{N}]$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{2}\exp[j\pi kn]$$

$$x(n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp[j\pi n])$$

$$x(n) = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

(0.5 puntos)

Criterio de corrección

N=2 por gráfico o sin justificación analítica: 1 punto

N=4: 1 punto

a_k con error de arrastre: 0.5 puntos.

x(n) con error de arrastre: 0.3 puntos.

1.2 Máximo 3 puntos

Al igual que en el ejercicio anterior, para que la señal sea periódica se debe cumplir:

$$x_2(n+N) = x_2(n)$$
$$\left|sen(1.5(n+N))\right| = \left|sen(1.5n+1.5N))\right|$$

Como $sen(x) = -sen(x+\pi)$

Entonces:

$$1.5N = \lambda\pi$$
$$N = \frac{2\pi}{3}\lambda$$

No existe λ entero tal que N sea un entero. (2 puntos)

Por lo que la señal no es periódica $\rightarrow$ No es posible obtener el desarrollo en series de Fourier (1 punto).

Criterio de corrección

Si concluye por análisis del gráfico o sin justificación analítica: 1,5 pts en total

PREGUNTA 2

Considere un sistema cuya respuesta en frecuencia, con a, b y c reales, está dada por:

$$H(\Omega) = \frac{1 + ae^{-j\Omega} + be^{-j2\Omega}}{c + ae^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}}$$

2.1 Obtenga la expresión general de la ecuación en diferencia que satisface el sistema.
2.2 Analice la causalidad y la estabilidad del sistema.
2.3 Para el caso $c = b$, grafique la amplitud del espectro de $H(\Omega)$. Justifique.
2.4 Que implicancia práctica tiene el resultado obtenido en 2.3?

Solución

2.1 Máximo 1.5 puntos

Sabemos que $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$, por lo tanto podemos hacer lo siguiente:

$$(c + ae^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega})Y(\Omega) = (1 + ae^{-j\Omega} + be^{-j2\Omega})X(\Omega)$$

Como sabemos que las exponenciales representan retardos, tenemos la siguiente ecuación en diferencias que satisface al sistema:

$$cy(n) + ay(n-1) + y(n-2) = x(n) + ax(n-1) + bx(n-2)$$

2.2 Máximo 2 puntos

Como el grado del numerador no es mayor que el del denominador el sistema es causal, pero la condición en este sistema para que sea causal es que ‘c’ tiene que ser distinto de cero.

Ahora analizaremos la estabilidad. De la ecuación en diferencias podemos obtener las raíces del polinomio característico:

$$c\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4c}}{2c}$$

$$\alpha_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4c}}{2c}$$

Luego, la condición de estabilidad es que todas las raíces del polinomio característico tengan módulo menor que uno.

$$\left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4c}}{2c} \right| < 1$$

$$\left| \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4c}}{2c} \right| < 1$$

2.3 Máximo 2 puntos

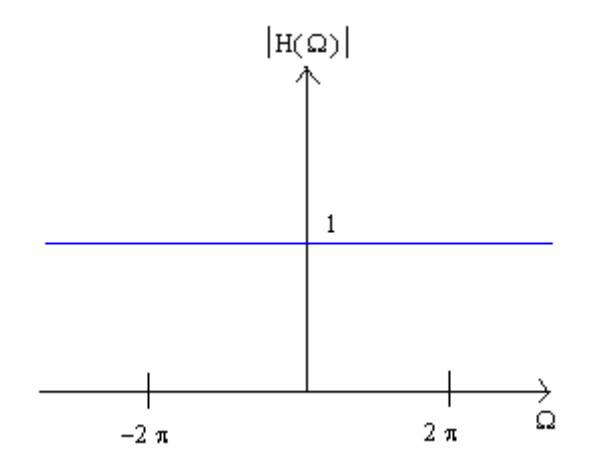
Veamos que pasa con la amplitud si c = b:

$$H(\Omega)H^*(\Omega) = \left(\frac{1+ae^{-j\Omega}+be^{-j2\Omega}}{b+ae^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}}\right)\left(\frac{1+ae^{j\Omega}+be^{j2\Omega}}{b+ae^{j\Omega}+e^{j2\Omega}}\right)$$

$$H(\Omega)H^*(\Omega) = \frac{1+ae^{j\Omega}+be^{j2\Omega}+ae^{-j\Omega}+a^2+abe^{j\Omega}+be^{-j2\Omega}+abe^{-j\Omega}+b^2}{b^2+abe^{j\Omega}+be^{j2\Omega}+abe^{-j\Omega}+a^2+ae^{j\Omega}+be^{-j2\Omega}+ae^{-j\Omega}+1} = 1$$

Vemos que el numerador es igual al denominador, por lo tanto se cancelan y la amplitud resulta ser unitaria para cualquier valor de la frecuencia.

Luego, el gráfico de amplitud en función de la frecuencia es:

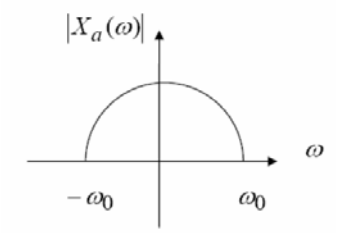


2.4 Máximo 0.5 puntos

En la práctica el sistema resulta ser un filtro pasa todo, o sea deja pasar todas las frecuencias sin distorsionarlas.

PREGUNTA 3

La amplitud del espectro de una señal analógica corresponde a la mostrada en la figura, en la cual ω_0=100 *rad* / *seg*.



3.1 Dibuje la amplitud del espectro de la señal muestreada con un periodo de muestreo *T*= 2π *mseg*.

3.2 Se desea submuestrear la señal con un periodo de muestreo *MT* . Cuál es el máximo valor de *M* tal que se satisface el Teorema del Muestreo?

3.3 Dibuje la amplitud del espectro de la señal muestreada con periodo *T*1 = 4*T*.

3.4 Dibuje la amplitud del espectro que se obtiene al interpolar la señal resultante de 3.3, empleando una frecuencia de muestro ω_s= 75 *rad* / *seg*.

3.5 Repita el desarrollo 3.1 a 3.4 empleando herramientas computacionales. Compare con el análisis anterior y explique posibles diferencias.

Solución

Como punto de partida se define una expresión analítica del espectro mostrado en la figura. Por ser un semicírculo, la amplitud máxima es de 100.

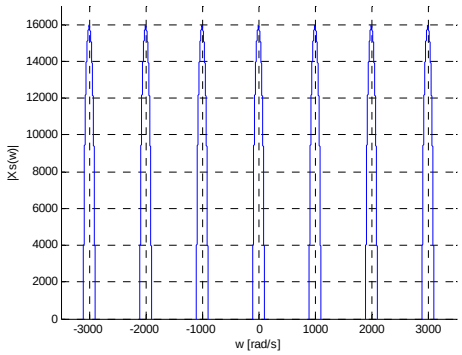
$$|X_a(\omega)| = \begin{cases} \sqrt{100^2 - \omega^2} & |\omega| \le 100 \\ 0 & |\omega| > 100 \end{cases}$$

3.1

Si el periodo es de T = 2π ms entonces la frecuencia de muestreo será de ω_s = 1000 rad/s. Con esto, se obtiene una versión muestreada de la señal original de la forma:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + r\omega_s) = \frac{1000}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + 1000r)$$

En el espacio de las frecuencias se obtienen réplicas de la señal original situadas en torno a múltiplos de la frecuencia de muestreo.



3.2

El Teorema del Muestreo define la mínima frecuencia con que se debe muestrear una señal analógica para que se pueda reconstruir sin errores. Si el ancho de banda de la señal es ω_0, entonces la condición para que no exista traslapo ("aliasing") es $\omega_s > 2\omega_0$.

Luego reemplazando valores tenemos que:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{MT} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot M \cdot 10^{-3}} = \frac{1000}{M}$$
$$2\omega_0 = 200$$

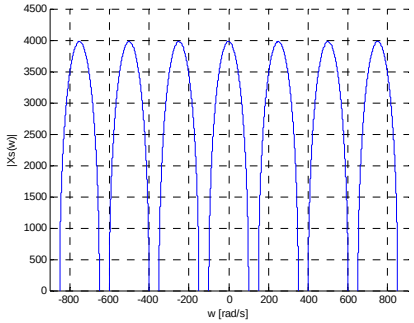
Entonces

$$\omega_s > 2\omega_0$$
$$\frac{1000}{M} > 200$$
$$M < 5$$

Luego M puede ser a lo más 5.

3.3

Se realiza de la misma forma que en 3.1, pero solo cambiando la frecuencia de muestreo a ω_s= 250 [rad/seg]. Se puede ver que se sigue manteniendo la condición para que no exista aliasing.



3.4

Para interpolar la señal de 3.3 con una frecuencia de muestreo ω_s de 75 [rad/s], por lo que nuestro periodo corresponderá a $T_s = 2\pi/75$ [s]. Consideramos todos los pasos a seguir hasta este punto:

$$T = 2\pi \cdot 10^{-3}[s]$$
$$T_1 = 8\pi \cdot 10^{-3}[s]$$
$$T_2 = 2\pi / 75[s]$$

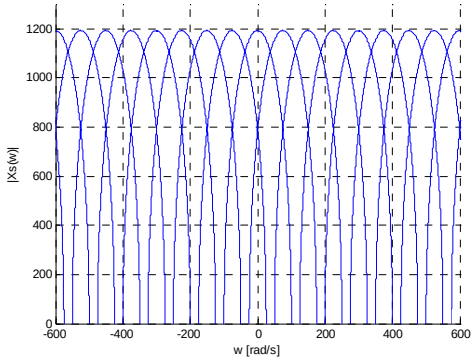
Luego se cumplen las siguientes relaciones:

$$M = \frac{T_1}{T} = 4$$
$$L = \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{10}$$

Ya que la interpolacion y la decimacion son posibles únicamente usando números enteros, la segunda operacion de 3.4 en realidad corresponde a una decimación por un factor de 10, seguida de una interpolación de 3.

Resumiendo todos los pasos nos queda: una decimación por un factor de 40 seguida de una interpolación por un factor de 3, lo cual viola el valor impuesto por el teorema del muestreo (factor de 5), resultando en aliasing en la señal resultante.

A continuación se presenta el resultado obtenido.



Criterio de corrección

- Un punto para cada pregunta 3.1 a 3.4.
- 4 puntos para pregunta 3.5 (1 por cada pregunta).
- En caso de haber entregado una solución corregida a la entregada al terminar la prueba, se consideró una bonificación equivalente a la mitad del puntaje correspondiente.
- Descuentos:
    - -0.1 por cada gráfico si eje |Xs| esta malo por error amplitud señal original.
    - -0.2 por cada eje malo en cada gráfico, errores claros o ausencia de ejes.
    - -0.5 error de magnitud en 3.2
    - -0.5 por ausencia de desarrollo en 3.4.