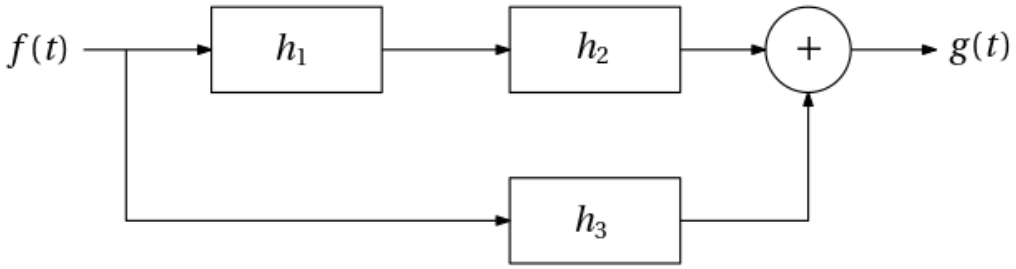
IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS
Interrogación 2
Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2023
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 60
Fecha: 24/04/2023

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Subsistemas**. Considere el sistema $f(t) \to g(t)$ compuesto por los tres subsistemas de la figura



cuyas respuestas al impulso son respectivamente $h_1 = \delta' \quad h_2(t) = \sqcap(t) \quad h_3 = 3e^{3t}\delta$

(a) (3 pts.) Determine la respuesta al impulso total del sistema.

(b) (3 pts.) Determine si el sistema es lineal e invariante.

(c) (3 pts.) Encuentre el sistema inverso del sistema completo.

(d) (3 pts.) Determine la salida si la entrada es $f(t) = \sinh^2(t)\sqcap(t-1)$.

$$\text{HINT}: \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Solución

(a) Vemos que el sistema h_1 en serie con h_2 no altera la entrada. En efecto la respuesta al impulso h_4 de ese subsistema es

$$h_4 = h_1 * h_2 = \delta' * \sqcap = \sqcap' * \delta = \sqcap' = \delta \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Determinar esto es trivial observando que el primer sistema es un derivador y el segundo un integrador. Ambas operaciones se cancelan. Además

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

$$h_3 = 3e^{3t}\delta = 3e^{3\times 0}\delta = 3\delta \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

es decir es simplemente un sistema que amplifica la entrada por 3.

La respuesta al impulso total es simplemente

$$h = \delta + 3\delta = 4\delta \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

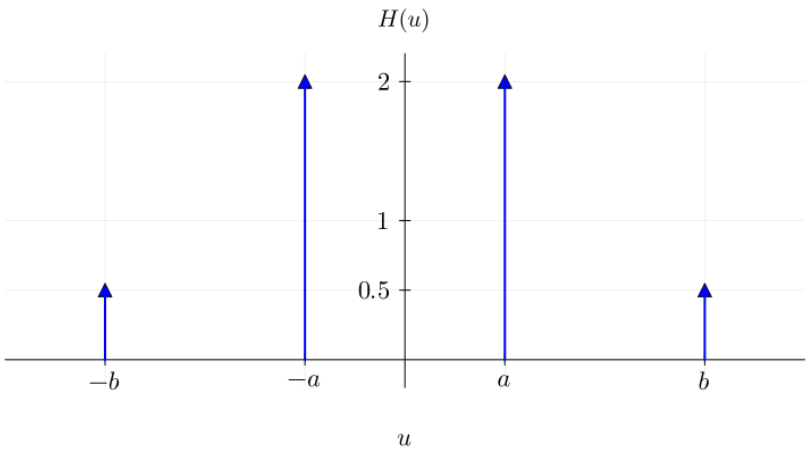
es decir, el sistema como un todo solo amplifica la entrada por 4.

(b) Claramente el sistema es LTI, es solo un amplificador $\rightarrow$ **3 pts.**

(c) El sistema inverso es un atenuador en un factor de cuatro, con respuesta al impulso $\frac{\delta}{4}$ $\rightarrow$ **3 pts.**

(d) Si la entrada es $\sinh^2(t)\sqcap(t-1)$, la salida es $4\sinh^2(t)\sqcap(t-1)$ $\rightarrow$ **3 pts.**

2. (12 pts.) **Respuesta de frecuencia**. La respuesta de frecuencia de un sistema se define como la Transformada de Fourier de su respuesta al impulso. Considere un sistema cuya respuesta de frecuencia es la de la figura, donde $a, b > 0$ y donde las flechas denotan impulsos.



(a) (3 pts.) Determine si el sistema es estable y además causal.

(b) (3 pts.) Si el sistema es estable y causal, muestre que es así a través de un ejemplo particular. Si el sistema no es estable o no es causal, determine como podría modificarse el sistema para que sea causal y estable y qué pasaría con su respuesta de frecuencia.

(c) (3 pts.) Determine la salida cuando la entrada es $\cos(2\pi(b-a)t)$. Determine los valores posibles de a y b que producen salidas distintas.

(d) (3 pts.) Determine la salida cuando la entrada es $\text{sinc}\,((a+b)t)$.

Solución

(a) La respuesta al impulso es

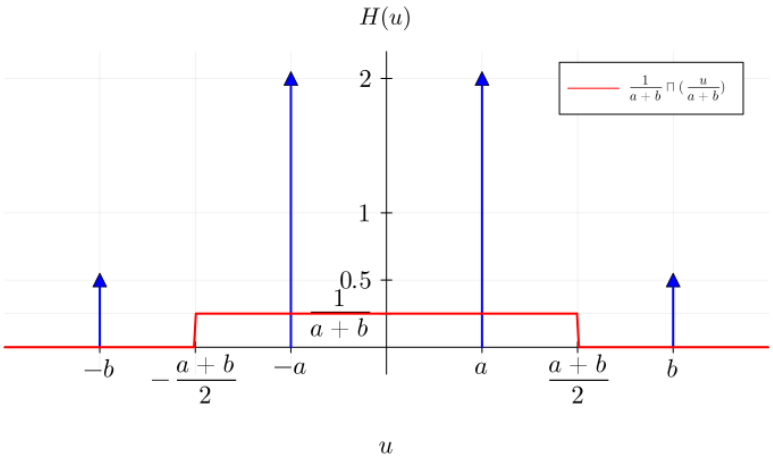
$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{\delta_b + \delta_{-b}}{2} + 2\delta_a + 2\delta_{-a}\} = \cos(2\pi bt) + 4\cos(2\pi at) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Como la respuesta al impulso no decae cuando $t \to \infty$ el sistema no es estable $\rightarrow$ **1 pt.** y el sistema es no causal por que la respuesta al impulso existe desde el $-\infty$ $\rightarrow$ **1 pt.**

(b) Como el sistema es inestable y no causal, una posible solución para volverlo estable y causal sería multiplicar la respuesta al impulso por un rect desfasado y escalado, que comience en cero (para que sea causal) $\rightarrow$ **1 pt.** y tenga una duración finita (para que sea estable) $\rightarrow$ **1 pt.** La respuesta de frecuencia se vería convolucionada por una función sinc angosto (dependiendo del ancho del rect) multiplicada por una exponencial compleja, producto del desfase del rect en el tiempo $\rightarrow$ **1 pt.**

(c) En el caso general, la salida es cero, porque el sistema amplifica por cero la frecuencia (b-a) $\rightarrow$ **1 pt.** Sin embargo, hay casos especiales donde el sistema podría generar una salida, por ejemplo, cuando a o b valen 0 $\rightarrow$ **1 pt.** , o cuando $b = 2a$. En este caso, la frecuencia de la sinusoide sería a y el sistema si deja pasar esa frecuencia, en ese caso habría salida $\rightarrow$ **1 pt.**

(d) La entrada, en el dominio de fourier es $F(u) = \frac{1}{a+b}\sqcap(\frac{u}{a+b})$ $\rightarrow$ **1 pt.** tal como se muestra en siguiente figura junto a la respuesta del sistema:



Vemos que la entrada, en el dominio de Fourier, se traslapa con la frecuencia a, pero no con la frecuencia b, por lo que la salida, en el dominio de Fourier es simplemente un componente sinusoidal de frecuencia a con amplitud $\frac{4}{a+b}$.

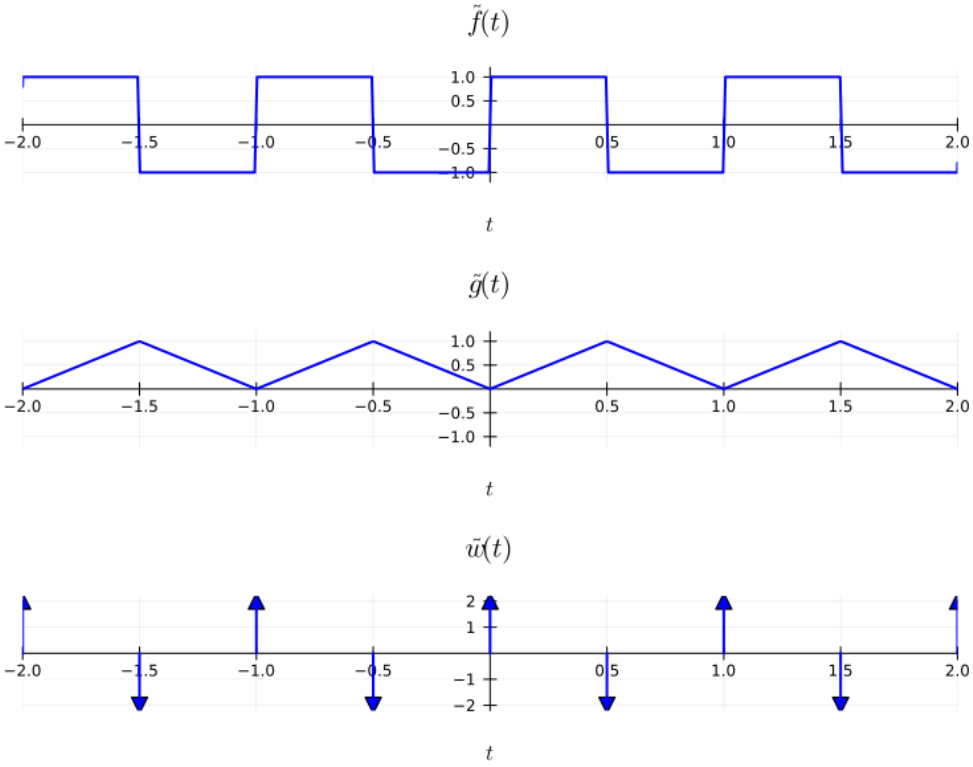
En efecto

$$G(u) = \frac{2}{a+b}(\delta_a + \delta_{-a}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

entonces

$$g(t) = \frac{4}{a+b}\cos(2\pi at) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

3. (12 pts.) **Series de Fourier**. Considere la siguientes tres señales periódicas $\tilde{f}(t), \tilde{g}(t), \tilde{w}(t)$ de la figura, donde las flechas denotan impulsos.



(a) (3 pts.) Escriba $\tilde{f}(t)$ como una Serie de Fourier.

(b) (3 pts.) Escriba $\tilde{g}(t)$ como una Serie de Fourier.

(c) (3 pts.) Escriba $\tilde{w}(t)$ como una Serie de Fourier.

(d) (3 pts.) Describa como se distribuye comparativamente la energía en los coeficientes de la Serie de Fourier de las tres señales anteriores.

Solución

Observamos primero que todas las señales tienen período 1.

(a) En el caso de $\tilde{f}(t)$ tenemos

$$c_n = \int_0^{1/2} 1e^{-i2\pi nt}dt + \int_{1/2}^{1} -1e^{-i2\pi nt}dt = \int_0^{1/2} e^{-i2\pi nt}dt - \int_{1/2}^{1} e^{-i2\pi nt}dt$$

$$= \frac{1}{-2i\pi n}e^{-i2\pi nt}\Big|_0^{1/2} - \frac{1}{-2i\pi n}e^{-i2\pi nt}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{-2i\pi n}\left(e^{-i\pi n} - 1\right) + \frac{1}{2i\pi n}\left(e^{-2i\pi n} - e^{-i\pi n}\right)$$

$$= \frac{1}{-2i\pi n}\left(e^{-i\pi n} - 1 - e^{-2i\pi n} + e^{-i\pi n}\right) = \frac{1}{-2i\pi n}\left(2e^{-i\pi n} - 2\right) = \frac{1}{i\pi n}\left(1 - e^{-i\pi n}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Vemos que los coeficientes, para n par, valen 0. Para n impar, valen $\frac{2}{i\pi n}$.

Es decir, podemos escribir

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty,\ n \text{ impar}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} e^{i2\pi nt} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Esta suma, como va desde $-\infty$ hasta ∞, tiene contribuciones positivas y negativas de la exponencial. Además, como

$$\sin(2\pi nt) = \frac{e^{i2\pi nt} - e^{-i2\pi nt}}{2i}$$

entonces

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=0,\ n \text{ impar}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(2\pi nt) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(6\pi t) + \frac{4}{5\pi}\sin(10\pi t) + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Observamos que $\tilde{g}(t)$ es la integral de $\tilde{f}(t)$. Por lo tanto su expresión en Series de Fourier es simplemente

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}\frac{1}{1\times 2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{4}{3\pi}\frac{1}{3\times 2\pi}\cos(6\pi t) - \frac{4}{5\pi}\frac{1}{5\times 2\pi}\cos(10\pi t) + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

Vemos que los coeficientes simplemente se dividen por un factor de $2\pi n$, lo que es coherente con la propiedad de la derivada de la Transformada de Fourier.

(c) Observamos que $\tilde{w}(t)$ es la derivada de $\tilde{f}(t)$. Por lo tanto su expresión en Series de Fourier es simplemente

$$\tilde{w}(t) = \frac{4\times(1\times 2\pi)}{\pi}\cos(2\pi t) + \frac{4\times(3\times 2\pi)}{3\pi}\cos(6\pi t) + \frac{4\times(5\times 2\pi)}{5\pi}\cos(10\pi t) + \ldots \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

Vemos que los coeficientes simplemente se multiplican por un factor de $2\pi n$, lo que es coherente con la propiedad de la derivada de la Transformada de Fourier.

(d) Con respecto a $\tilde{f}(t)$ $\rightarrow$ **1 pt.** , los coeficientes de la señal $\tilde{g}(t)$ son los coeficientes de $\tilde{f}(t)$ divididos por un factor de n, lo que implica que concentra la energía en torno a las bajas frecuencias (o lo que es lo mismo, atenúa más los componentes de alta frecuencia), por que sus coeficientes decaen en forma inversamente proporcional al cuadrado de n $\rightarrow$ **1 pt.** Contrariamente, la señal $\tilde{w}(t)$ dispersa las energías hacia las altas frecuencias, porque multiplica los coeficientes de la señal $\tilde{g}(t)$ por un factor proporcional a n. Esto hace que los componentes de $\tilde{w}(t)$ no decaigan con n, lo que explica la aparición de los impulsos en la señal $\rightarrow$ **1 pt.**

4. (12 pts.) **Signos y escalones**. Considere las funciones signo, $\text{sgn}(x)$ y escalón $\sqcap(x)$.

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

(a) (3 pts.) Sin recurrir a la Transformada de Fourier del signo, explique y muestre porqué la Transformada de Fourier del escalón contiene un impulso en el origen.

(b) (3 pts.) Explique porqué la Transformada de Fourier del signo no contiene impulsos.

(c) (3 pts.) Extienda los resultados anteriores a una función continua que contenga un número entero positivo N de discontinuidades finitas. ¿Qué puede decir de la Transformada de Fourier de esta función?

(d) (3 pts.) Usando los resultados anteriores, encuentre la Transformada de Fourier de la señal $f(x) = |x|$.

Solución

(a) Hay varias formas de probar esto sin recurrir al signo. La más simple quizás es aplicar las propiedades de Fourier a partir del impulso

$$\delta \to 1$$

$$\sqcap' \to 1$$

$$\sqcap' \to i2\pi u\mathcal{F}\{\sqcap\} = 1 \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

es decir tenemos la igualdad

$$i2\pi u\mathcal{F}\{\sqcap\} = 1$$

Como al pasar u al otro lado de la ecuación hace que la Transformada de Fourier se indefina en el origen, hay que hacer esto con cuidado, es decir

$$\mathcal{F}\{\sqcap\} = \frac{-1}{i2\pi}\text{v.p}\{\frac{1}{u}\} + \mathcal{F}\{\sqcap\}\Big|_{u=0} \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

El primer término es el valor para todo u excepto para $u = 0$. El valor principal de Cauchy hace justamente esto, separa el origen del resto del dominio. El segundo término, entonces, como es la componente de frecuencia cero, es el promedio de la señal en el otro dominio y como solo nos interesa el valor en el origen, entonces:

$$\mathcal{F}\{\sqcap\} = \frac{-1}{i2\pi}\text{v.p}\{\frac{1}{u}\} + \frac{1}{2}\delta \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Otra forma de ver esto es aproximar el escalón por una exponencial unilateral de la forma $e^{-at}\sqcap(t)$ con $a > 0$ y tomar el límite cuando $a \to 0$, lo que conduce al mismo resultado.

(b) La Transformada de Fourier del signo no contiene impulsos porque en realidad en el origen posee dos impulsos, uno con amplitud negativa y otra positiva, que se cancelan.

Otra forma de verlo es operando tal como lo hicimos en el caso anterior, pero como en este caso el promedio de la señal es cero, no hay componente de frecuencia cero y no aparece el impulso en el origen $\to \boxed{\textbf{3 pts.}}$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

(c) Una función de este tipo puede modelarse como una señal continua a la cual se suman N escalones desplazados en cada punto de discontinuidad → **1 pt.** Su Transformada de Fourier tendrá, entonces N términos adicionales correspondientes a las transformadas de Fourier de cada uno de estos escalones → **1 pt.** Estas transformadas, al estar los escalones desplazados, a su vez están todas multiplicadas por exponenciales complejas → **1 pt.**

(d) Observamos que la señal $f(x) = |x|$ es la integral del signo → **1 pt.** Entonces

$$\mathcal{F}\{|x|\} = \frac{\mathcal{F}\{\text{sgn}(x)\}(u)}{i2\pi u} = \frac{1}{i\pi}\text{v.p}\{\frac{1}{u}\}\frac{1}{i2\pi}\text{v.p}\{\frac{1}{u}\} = -\frac{1}{2\pi^2}\text{v.p}\{\frac{1}{u^2}\} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

5. (12 pts.) **Muestreo.** Suponga que ud. desea tomar muestras de una señal continua $f(t)$ para volverla discreta. Para esto, como esta materia aún no se ha visto en el curso, ud. le pregunta a chat-gpt como hacerlo, obteniendo la siguiente respuesta:

> Para muestrear una señal continua se utiliza la distribución Shah. Primero se genera una función matemática que consiste en una serie infinita de impulsos delta de Dirac separados por un intervalo de tiempo uniforme. Luego, se multiplica la señal continua por esta función y se toman medidas de la señal resultante en intervalos de tiempo uniformes para obtener muestras de la señal original. Cada medida se convierte en un número binario y se procesa posteriormente. La distribución Shah es una forma común de muestrear señales continuas de manera periódica y se utiliza ampliamente en la teoría de la comunicación y el procesamiento de señales.

Hagámosle caso a chat-gpt y veamos que tan bien nos va. Para esto conteste cada uno de las siguientes preguntas:

(a) (3 pts.) Muestre que la transformada de Fourier de una distribución shah de un período determinado es otra distribución shah con otro período. Determine explícitamente la relación entre ambos períodos.

(b) (3 pts.) Haga lo que chat-gpt sugiere: multiplicar la señal que se desea muestrear por un Shah. ¿Cual es la diferencia entre la Transformada de Fourier de la señal continua original y la señal muestreada?

(c) (3 pts.) ¿Es la señal muestrada realmente una señal discreta? Argumente.

(d) (3 pts.) ¿Existe alguna forma de preservar la "forma" (la distribución de la energía con respecto a la frecuencia) del espectro de frecuencias (Transformada de Fourier) de la señal original en la señal muestreada? Si la respuesta es sí, determine que criterios debe cumplir $f(t)$ para que esto ocurra. Si la respuesta es no, explique que impide que esto se pueda hacer.

Solución

(a) Tomando la Transformada de Fourier a un Shah, tenemos

$$\mathcal{F}\{\text{Ш}_{\boldsymbol{a}}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\boldsymbol{\delta_{na}}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi una}\mathbf{1}$$

Si consideramos que al sumar para todo n positivo y negativo, podemos escribir:

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

$$\mathcal{F}\left\{\text{Ш}_{\boldsymbol{a}}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi una} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

resultado que se parece mucho a una Serie de Fourier, donde vemos que la Transformada de Fourier del shah es una función períodica de período $1/a$.

Entonces,

$$\langle \mathcal{F}\left\{\text{Ш}_{\boldsymbol{a}}\right\}, \varphi \rangle = \langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta_{na}}, \mathcal{F}\left\{\varphi\right\} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \boldsymbol{\delta_{na}}, \mathcal{F}\left\{\varphi\right\} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\varphi(na)\}$$

Este resultado implica que aplicar la Transformada de Fourier de la distribución Shah a una función de Schwartz es simplemente sumar todas las Transformadas de Fourier de la función de Schwartz evaluadas en todos los puntos na.

Pero esto no lo es todo. Poisson determinó la famosa fórmula de la suma de Poisson que dice que si φ es una función de Schwartz, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\varphi(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Finalmente, dado que $\mathcal{F}\left\{\text{Ш}_{\boldsymbol{a}}\right\}$ tiene período $1/a$, vemos que la Transformada de Fourier de un Shah espaciado en a es otro Shah, pero espaciado en $1/a$.

$$\mathcal{F}\left\{\text{Ш}_{\boldsymbol{a}}\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta_{na}}\right\} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta_{n/a}} = \frac{1}{a} \text{Ш}_{\boldsymbol{1/a}}$$

En forma compacta:

$$\text{Ш}_{\boldsymbol{a}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a} \text{Ш}_{\boldsymbol{1/a}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) De acuerdo a la parte anterior, al multiplicar una función por un Shah, lo que sucede es que su espectro se convoluciona con otro Shah, es decir, su Transformada de Fourier se vuelve periódica, con cada período centrado en cada uno de los impulsos del Shah en frecuencia. En resumen, el espectro original no es periódico, el muestreado si lo es $\rightarrow$ **3 pts.**

(c) La señal muestreada es en realidad continua, consistente en infinitos impulsos, separados equidistantemente, y cada uno de ellos multiplicado por el valor de amplitud, en las posiciones de los impulsos, de la señal que se muestreó $\rightarrow$ **3 pts.**

(d) La clave aquí es que evitar que las réplicas del espectro original se traslapen $\rightarrow$ **1 pt.** Se esta manera, la "forma" del espectro original se conserva y se puede recuperar mediante la multiplicación por un rect de ancho igual al período del Shah en frecuencia. Para esto, la Transformada de Fourier de la señal original debe ser de ancho de banda limitado $\rightarrow$ **1 pt.** , lo que implica que la señal en el tiempo de duración infinita $\rightarrow$ **1 pt.**