Ayudantía 11

DFT

Señales y Sistemas

11 de noviembre de 2022

Contenido

1. Resumen: Transformada Z
2. Ejercicio 1: Transformada Z
3. Ejercicio 2: Transformada Z
4. Ejercicio 3: Transformada Z inversa
5. Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Contenido

1. Resumen: Transformada Z
2. Ejercicio 1: Transformada Z
3. Ejercicio 2: Transformada Z
4. Ejercicio 3: Transformada Z inversa
5. Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Resumen: Transformada Z

Se define la transformada Z como una transformación de funciones de variable n discreta a funciones de variable z continua:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

Donde $z = e^s$ donde s es la variable de Laplace $s = \sigma + i2\pi u$
La ROC de una transformada z consiste en el rango de valores que puede tomar la variable z (dominio). Este en general está determinado por los valores que puede tomar z para que la sumatoria converja.

Resumen: Transformada Z Propiedades

- Linealidad:

$$\mathcal{Z}\{a \cdot f[n] + b \cdot g[n]\} = a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$$

- Inversión:

$$\mathcal{Z}\{f[-n]\} = F(z^{-1})$$

- Desplazamiento:

$$\mathcal{Z}\{f[n-m]\} = z^{-m}F(z)$$

- Convolución:

$$\mathcal{Z}\{f[n] *_l g[n]\} = F(z)G(z)$$

- Diferenciación en frecuencia:

$$\mathcal{Z}\{n \cdot f[n]\} = -z\frac{d}{dz}F(z)$$

- Escalamiento:

$$\mathcal{Z}\{a^n \cdot f[n]\} = F(a^{-1}z)$$

Resumen: Transformada Z Inversa

Para calcular la transformada Z inversa hay dos métodos útiles:

- Fracciones parciales y buscar pares conocidos.
- Usar el **teorema del residuo**. El teorema del residuo indica que para una función $f(z)$ con N polos p_i de orden k_i cada uno, su transformada inversa $f[n]$ está dada por:

$$f[n] = \sum_{k=1}^{N} \text{Res}\left(z^{k_i-1}F(z), z_i\right)$$

Donde:

$$\text{Res}\left(z^{k_i-1}F(z), z_i\right) = \lim_{z\to z_i}\left(\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z^{n-1}F(z)(z-z_i)^k)\right)$$

Contenido

1. Resumen: Transformada Z
2. Ejercicio 1: Transformada Z
3. Ejercicio 2: Transformada Z
4. Ejercicio 3: Transformada Z inversa
5. Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Ejercicio 1: Transformada Z

Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

$$f[n] = u[n]$$

Ejercicio 1: Transformada Z

Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

$$f[n] = u[n]$$

- Para resolver esto, aplicamos la definición de transformada Z:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n}$$

Ejercicio 1: Transformada Z

Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

$$f[n] = u[n]$$

- Para resolver esto, aplicamos la definición de transformada Z:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n}$$

- Aplicando que escalón vale cero desde menos infinito a cero y luego de eso vale 1, al sumar los negativos estamos sumando cero, por lo que la sumatoria cambia a:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Ejercicio 1: Transformada Z

Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

$$f[n] = u[n]$$

- Para resolver esto, aplicamos la definición de transformada Z:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n}$$

- Aplicando que escalón vale cero desde menos infinito a cero y luego de eso vale 1, al sumar los negativos estamos sumando cero, por lo que la sumatoria cambia a:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

- Observemos que si $|z^{-1}| < 1$ la suma corresponde a una serie geométrica, por lo que converge. Entonces:

Contenido

1. Resumen: Transformada Z
2. Ejercicio 1: Transformada Z
3. Ejercicio 2: Transformada Z
4. Ejercicio 3: Transformada Z inversa
5. Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Ejercicio 2: Transformada Z

Encuentre la transformada Z con región de convergencia de:

$$x[n] = a^{\lfloor n/3 \rfloor} u[n]$$

Donde a es un número real positivo y $\lfloor n/3 \rfloor$ es el entero más grande que es menor a $n/3$.

Ejercicio 2: Transformada Z

Encuentre la transformada Z con región de convergencia de:

$$x[n] = a^{\lfloor n/3 \rfloor} u[n]$$

Donde a es un número real positivo y $\lfloor n/3 \rfloor$ es el entero más grande que es menor a $n/3$.

- La transformada Z de x[n] es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n>0 \text{ y divisible por } 3}^{\infty} \left(a^{\frac{n}{3}} z^{-n} + a^{\frac{n}{3}} z^{-n-1} + a^{\frac{n}{3}} z^{-n-2} \right)$$

Ejercicio 2: Transformada Z

Encuentre la transformada Z con región de convergencia de:

$$x[n] = a^{\lfloor n/3 \rfloor} u[n]$$

Donde a es un número real positivo y $\lfloor n/3 \rfloor$ es el entero más grande que es menor a $n/3$.

- La transformada Z de x[n] es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n>0 \text{ y divisible por } 3} \left(a^{\frac{n}{3}} z^{-n} + a^{\frac{n}{3}} z^{-n-1} + a^{\frac{n}{3}} z^{-n-2} \right)$$

- Usando el cambio de variables $m = 3n$,

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m z^{-3m} (1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - az^{-3}}$$

Esta suma converge si y solo si $|az^{-3}| < 1$, es decir, la ROC es $|z| > |\sqrt[3]{a}|$

Contenido

1. Resumen: Transformada Z
2. Ejercicio 1: Transformada Z
3. Ejercicio 2: Transformada Z
4. Ejercicio 3: Transformada Z inversa
5. Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Ejercicio 3: Transformada Z inversa

Encuentre la transformada Z inversa de:

$$F(z) = e^{z^{-1}}$$

Ejercicio 3: Transformada Z inversa

Encuentre la transformada Z inversa de:

$$F(z) = e^{z^{-1}}$$

- Escribimos la expresión de $F(z)$ en series de Taylor:

$$e^{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

Ejercicio 3: Transformada Z inversa

Encuentre la transformada Z inversa de:

$$F(z) = e^{z^{-1}}$$

- Escribimos la expresión de $F(z)$ en series de Taylor:

$$e^{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

- Ahora, si tomamos la transformada inversa, cada z^{-k} representará un retardo en k del coeficiente $\frac{1}{n!}$:

$$f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta[n-k]$$

Ejercicio 3: Transformada Z inversa

Encuentre la transformada Z inversa de:

$$F(z) = e^{z^{-1}}$$

- Escribimos la expresión de $F(z)$ en series de Taylor:

$$e^{z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

- Ahora, si tomamos la transformada inversa, cada z^{-k} representará un retardo en k del coeficiente $\frac{1}{n!}$:

$$f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta[n-k]$$

- Por lo tanto:

$$f[n] = \frac{1}{n!} u[n]$$

Contenido

1. Resumen: Transformada Z
2. Ejercicio 1: Transformada Z
3. Ejercicio 2: Transformada Z
4. Ejercicio 3: Transformada Z inversa
5. Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Considere un sistema descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$$

Suponga que la salida de un sistema pasa por un filtro de función de transferencia $H(z) = (1 - z^{-1})^2$. Determine la salida del filtro $g[n]$ en términos de x.

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Considere un sistema descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$$

Suponga que la salida de un sistema pasa por un filtro de función de transferencia $H(z) = (1 - z^{-1})^2$. Determine la salida del filtro $g[n]$ en términos de x.

- Para resolver esto debemos escoger en que dominio será más fácil trabajar. Se optará por trabajar en el dominio n ya que es más fácil calcular la transformada inversa de la función de transferencia del filtro que de la multiplicación con la salida.

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

Considere un sistema descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$$

Suponga que la salida de un sistema pasa por un filtro de función de transferencia $H(z) = (1 - z^{-1})^2$. Determine la salida del filtro $g[n]$ en términos de x.

- Para resolver esto debemos escoger en que dominio será más fácil trabajar. Se optará por trabajar en el dominio n ya que es más fácil calcular la transformada inversa de la función de transferencia del filtro que de la multiplicación con la salida.
- Comenzamos expandiendo $H(z)$:

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

- Usando propiedad del desplazamiento:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

- Usando propiedad del desplazamiento:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

- Ahora, sabemos que la salida del filtro $g[n]$ está dada por:

$$g[n] = f[n] * h[n]$$

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

- Usando propiedad del desplazamiento:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

- Ahora, sabemos que la salida del filtro $g[n]$ está dada por:

$$g[n] = f[n] * h[n]$$

- Reemplazando f y h en la convolución:

$$g[n] = y[n] * (\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2])$$

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

- Usando propiedad del desplazamiento:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

- Ahora, sabemos que la salida del filtro $g[n]$ está dada por:

$$g[n] = f[n] * h[n]$$

- Reemplazando f y h en la convolución:

$$g[n] = y[n] * (\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2])$$

- Aplicando distributividad en la convolución:

$$g[n] = y[n] * \delta[n] - 2y[n] * \delta[n-1] + y[n] * \delta[n-2]$$

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

- Aplicando la propiedad del cedazo y desplazamiento en la convolución:

$$g[n] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]$$

Ejercicio 4: Transformada Z propiedades

- Aplicando la propiedad del cedazo y desplazamiento en la convolución:

$$g[n] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]$$

- que nos piden expresar g en términos de x, se hace la sustitución $y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$, de lo que se obtiene:

$$g[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n] - 2(b_0 + b_1(n-1) + b_2(n-1)^2 + x[n-1]) + b_0 + b_1(n-2) + b_2(n-2)^2 + x[n-2]$$