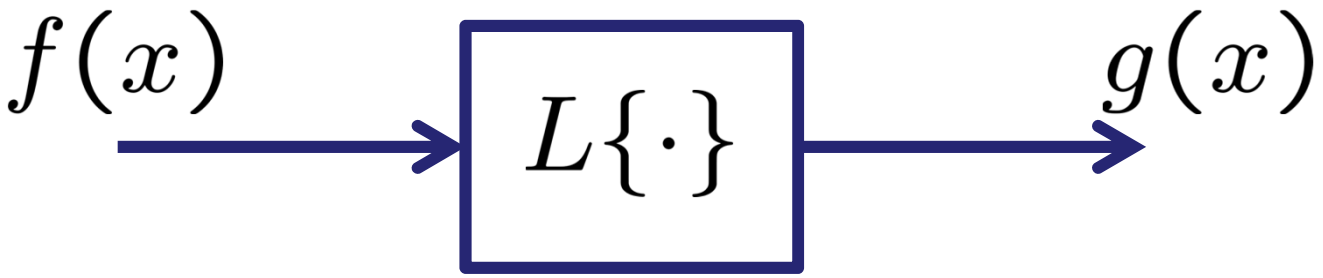
IEE 2103 Señales y Sistemas

Clase 2C: Variables de Estado

2.4 Representación de sistemas

Sistemas lineales e invariantes

- Ecuación diferencial de parámetros constantes



$$\frac{d^N}{dx^N}g(x) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{d^n}{dx^n}g(x) = \sum_{n=0}^{M} b_n \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

2.4 Representación de sistemas

$$\frac{d^N}{dx^N}g(x) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n \frac{d^n}{dx^n}g(x) = \sum_{n=0}^{M} b_n \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

$$g(x_o),\ g'(x_o),\ \ldots\ g^{(N-1)}(x_o)$$

$$(D^N + a_{N-1}D^{N-1} + \cdots + a_1 D + a_o)g(x)$$
$$= (b_M D^M + b_{M-1}D^{M-1} + \cdots + b_1 D + b_o)f(x)$$

Primer orden

$$\frac{dg(x)}{dx} = -a_o g(x) + b_o f(x) \qquad g(x_o)$$

$$g(x) = g_p(x) + g_h(x)$$

$$g_h(x) = Ce^{-a_o x}$$

$$g_p(x) = \int_{x_o}^{x} e^{-a_o(x-\xi)} b_o f(\xi) d\xi \quad x \geq x_o$$

$$g(x) = g(x_o)e^{-a_o(x-x_o)} + \sqcap(x-x_o) \int_{x_o}^{x} e^{-a_o(x-\xi)} b_o f(\xi) d\xi$$

Nota: $g(x_o)$ debe ser cero para que el sistema sea lineal

Órdenes mayores

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = -a_1\frac{dg(x)}{dx} - a_o g(x) + b_o f(x)$$

$$g(x_o),\ \ g'(x_o)$$

$$\frac{d^3g(x)}{dx^3} = -a_2\frac{d^2g(x)}{dx^2} - a_1\frac{dg(x)}{dx} - a_o g(x) + b_o f(x)$$

$$g(x_o),\ \ g'(x_o),\ \ g''(x_o)$$

Variables de estado

$$g'' = -a_1 g' - a_o g + b_o f$$

Sea $v_1(x) = g(x)$ y $v_2(x) = g'(x)$

$$v_2' = -a_1 v_2 - a_o v_1 + b_o f$$

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_o & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_o \end{bmatrix} f(x)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}$$

Variables de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(x) + \mathbf{b}f(x) \\ g(x) &= \mathbf{c}\mathbf{v}(x) + df(x) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix}$$

Solución a ecuaciones de estado

Solución a entrada cero

$$\mathbf{v}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{v}(x)$$

$$\mathbf{v}(x) = e^{\mathbf{A}(x-x_o)}\,\mathbf{v}_o$$

$$\mathbf{v}(x_o) = \mathbf{v}_o$$

Definiendo la exponencial matricial

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{I} + \mathbf{A}x + \mathbf{A}^2\frac{x^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Propiedades exponencial matricial

$$e^{\mathbf{A}x_1}e^{\mathbf{A}x_2} = e^{\mathbf{A}(x_1+x_2)}$$

$$\left\{e^{\mathbf{A}x}\right\}^{-1} = e^{-\mathbf{A}x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x} = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{A}$$

Solución a ecuaciones de estado

$$\mathbf{v}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{v}(x) + \mathbf{b}f(x)$$

Solución completa

$$\mathbf{v}(x) = e^{\mathbf{A}(x-x_o)}\mathbf{v}_o + \int_{x_o}^{x} e^{\mathbf{A}(x-\xi)}\mathbf{b}f(\xi)d\xi$$

Sea $\mathbf{\Phi}(x) = e^{\mathbf{A}x}$ la matriz de transición de estados

$$g(x) = g(x_o)e^{-a_o(x-x_o)} + \sqcap(x-x_o)\int_{x_o}^{x} e^{-a_o(x-\xi)}b_o f(\xi)d\xi$$

Solución a ecuaciones de estado

$$g(x) = \mathbf{c}\mathbf{v}(x) + df(x)$$

Solución final

$$g(x) = \mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x-x_o)\mathbf{v}_o + \int_{x_o}^{x} \mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x-\xi)\mathbf{b}f(\xi)d\xi + d\cdot f(x)$$

$$g(x) = \mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x-x_o)\mathbf{v}_o + \int_{x_o}^{x} \{\mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x-\xi)\mathbf{b} + d\delta(x-\xi)\} f(\xi)d\xi$$

$$g(x) = \mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x-x_o)\mathbf{v}_o + \{\mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{b} + d\delta(x)\} * f(x)$$

¿Por qué los límites de la integral no son infinito?

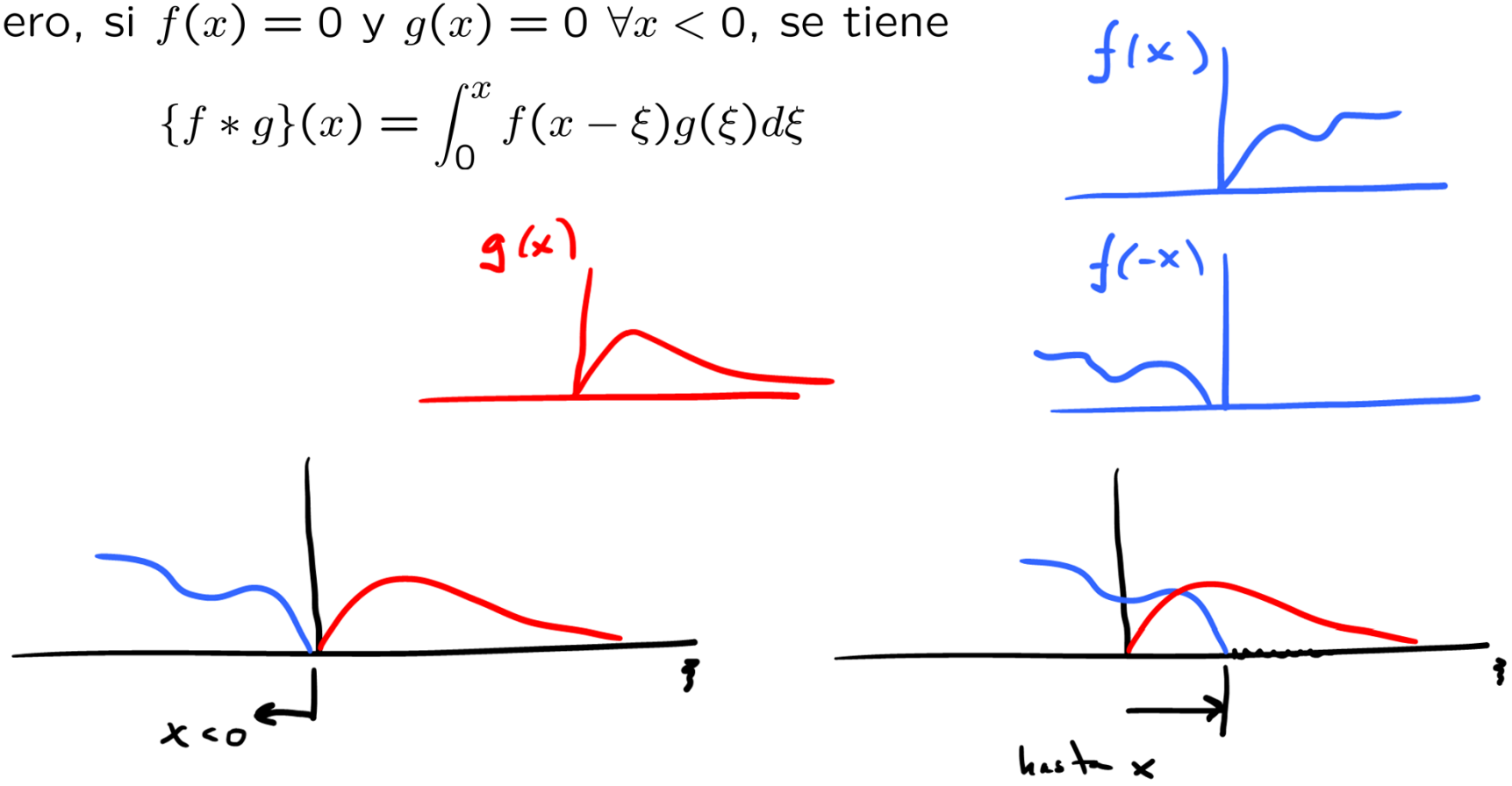
Paréntesis

La convolución está definida por

$$\{f * g\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

pero, si $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ $\forall x < 0$, se tiene

$$\{f * g\}(x) = \int_{0}^{x} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$



Solución a ecuaciones de estado

$$g(x) = \mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x - x_o)\mathbf{v}_o + \{\mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{b} + d\delta(x)\} * f(x)$$



Respuesta a entrada cero

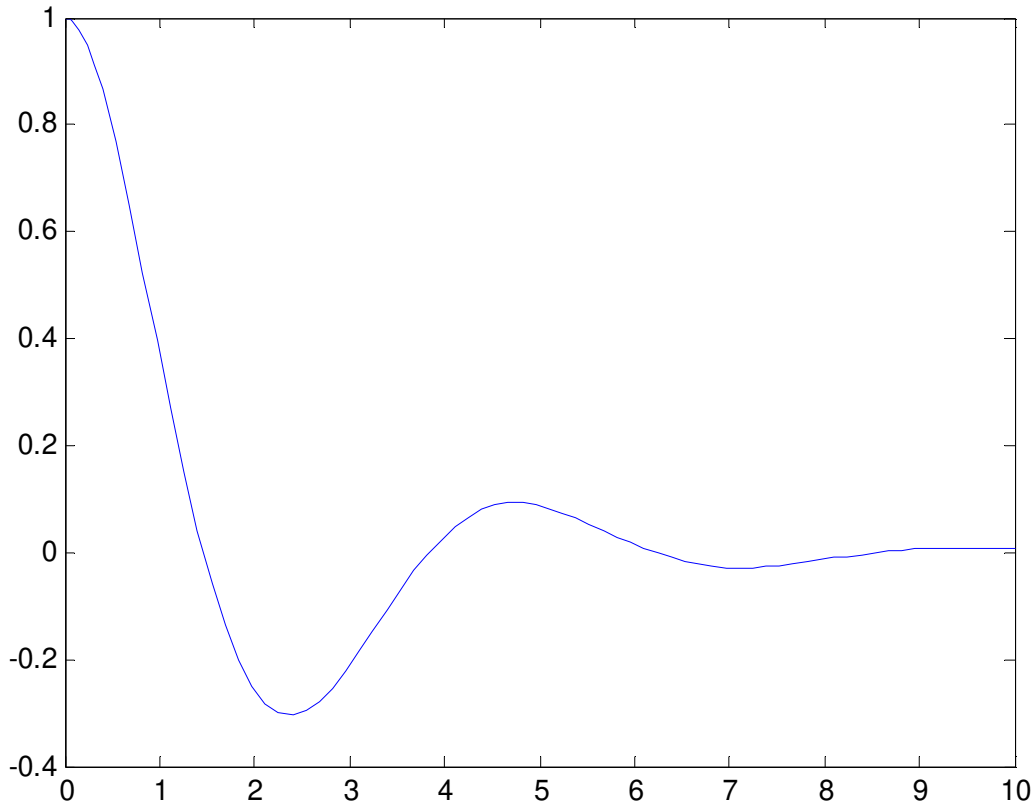


Respuesta a estado cero

Ejemplo

$$g''(x)+g'(x)+2g(x) = f(x) \quad g(0) = 1 \quad g'(0) = 0$$

Para f(x) = 0



Ejemplo

$$g''(x)+g'(x)+2g(x) = f(x) \quad g(0) = 1 \quad g'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(x) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(x) + \mathbf{b}f(x) \\ g(x) &= \mathbf{c}\mathbf{v}(x) + df(x) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$g''(x)+g'(x)+2g(x) = f(x) \quad g(0) = 1 \quad g'(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(x)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\mathbf{\Phi}(x) = \mathbf{I} + \mathbf{A}x + \mathbf{A}^2\frac{x^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 & -x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 \\ 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 & 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$g(x) = \mathbf{c}\mathbf{\Phi}(x - x_o)\mathbf{v}_o$$

$$g(x) = [1\ 0]\mathbf{\Phi}(x)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \Phi_{11}(x)$$

$$g(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \cdots$$

Ejemplo: aproximaciones

