Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2008-2

INTERROGACION Nº 2

1. Considere la señal *x(t)* que se muestra en la figura 1; la unidad de tiempo es el segundo y $t_0 = \pi/6$.

1.1 Determine la expresión general de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de *x(t)*, correspondientes a la forma polar.

1.2 Calcule la amplitud del tercer armónico para $B = 0{,}5A$.

1.3 Considere un sistema de función de transferencia $H(s) = \dfrac{2}{1+Ts}$ en que $x(t)$ es la entrada y *T=1 seg.* Obtenga la salida *y(t)* en régimen permanente.

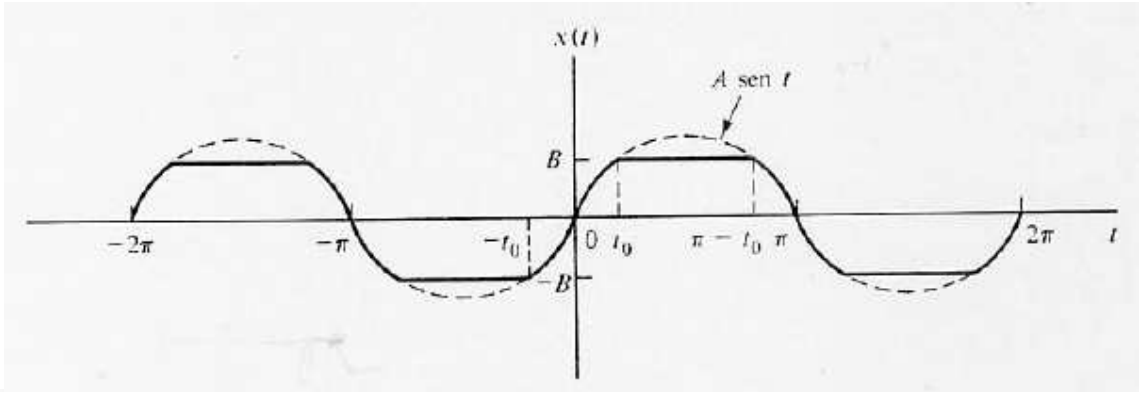


Figura 1

2. Considere las señales *x(t)* e *y(t)* que se muestran en la figura 2. Designe con $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ a sus respectivas Transformadas de Fourier.

2.1 Aplicando la definición, deduzca la expresión para $X(\omega)$.

2.2 Aplicando las propiedades de la Transformada de Fourier, obtenga la expresión para $Y(\omega)$.

2.3 Suponga que *x(t)* es la entrada e *y(t)* es la salida de un sistema de función de transferencia $H(s)$. Determine $H(s)$.

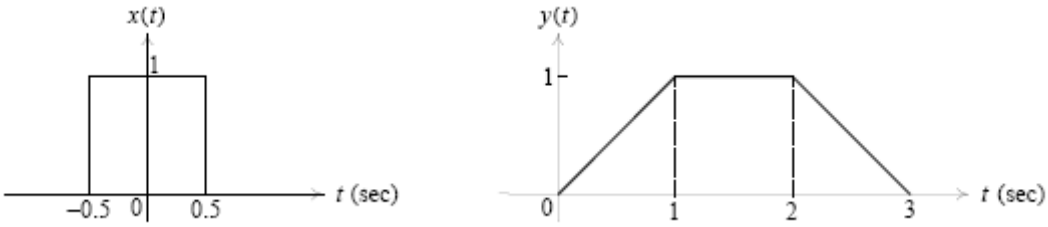


Figura 2

3. Utilizando un canal de radio que opera entre 650 kHz y 668 kHz se desea transmitir, simultáneamente y utilizando modulación en amplitud, las tres señales cuyos espectros se muestran en la figura 3.

3.1 Dibuje un diagrama en bloques de un sistema tal que en el extremo receptor se recuperen las tres señales transmitidas simultáneamente. Defina apropiadamente cada uno de los parámetros del sistema. Suponga que en la transmisión no se producen distorsiones.

3.2 Grafique el espectro de frecuencia de cada una de las señales que aparecen en el diagrama, y compruebe que el diseño realizado permite recuperar correctamente las señales transmitidas.

3.3 Indique cómo debe modificarse el diseño si el canal de radio opera entre: (a) 550 y 568 kHz; (b) 650 y 686 kHz; (c) 650 y 659 kHz.

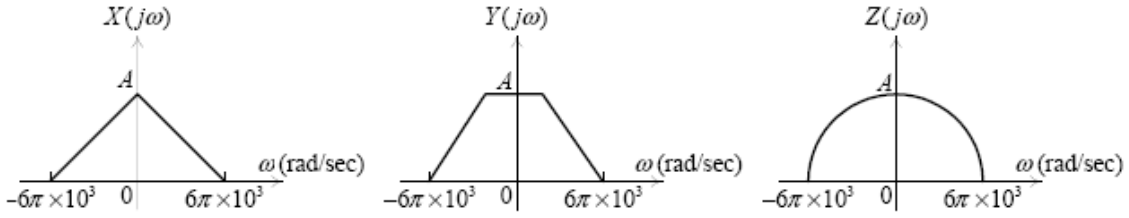


Figura 3

Observaciones

Tiempo: 2 horas.

Consultas sobre aclaraciones de enunciado sólo pueden realizarse al profesor y en los primeros 15 min.

No puede hacerse uso de material impreso ni calculadora, excepto de una hoja tamaño carta que contenga sólo fórmulas, la que debe ser entregada junto con sus respuestas.

Si requiere información complementaria para resolver un problema, agregue la que Usted considere más apropiada y especifíquelo en su respuesta.

Responda cada pregunta en hojas separadas. Recuerde escribir su nombre en cada hoja.

Pontificia Universidad Católica de Chile

Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2008-2

INTERROGACION Nº 2

PROBLEMA 1

1.1 (4 ptos.)

La señal *x(t)* es periódica de periodo $T = 2\pi$, de donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$

Los coeficientes pedidos son:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\cdot e^{-j\omega_0 nt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt$$

Entonces:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt + \int_{\pi}^{2\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt\right]$$

En la segunda integral sustituyo $t = \lambda + \pi$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt + \int_0^{\pi} x(\lambda+\pi)\cdot e^{-jn(\lambda+\pi)}d\lambda\right]$$

Usamos el hecho que $x(t+\pi) = -x(t)$. Además retorno a la variable t:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt - \int_0^{\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}\cdot e^{-jn\pi}dt\right]$$

Pero $e^{-jn\pi} = (-1)^n$, entonces

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{2\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt$$

Luego, para n par, $c_n = 0$ (en particular n=0). Este resultado es consistente con que *x(t)* sea una señal impar-

Para n impar:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cdot e^{-jnt}dt \,.$$

Todo lo que hagamos de aquí en adelante será para n impar.

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\, e^{-jnt}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\, e^{-jnt}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x(t)\, e^{-jnt}dt$$

Haciendo en la segunda integral $t = \pi - \lambda$ y observando que $x(\pi - \lambda) = x(\lambda)$ se tiene:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\, e^{-jnt}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\, e^{jnt}e^{-jn\pi}dt$$

Como *n* es impar*:*

$$c_n = \frac{-2j}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\, sen(nt)dt$$

Ahora separamos en 2 intervalos

$$c_n = \frac{-2j}{\pi}\left[\int_0^{\pi/6} A\sin(t)\cdot\sin(nt)dt + \int_{\pi/6}^{\pi/2} B\cdot\sin(nt)dt\right]$$

Ahora, una primitiva de $\sin(t)\cdot\sin(nt)$ es $\frac{1}{1-n^2}\left[-\cos(t)\sin(nt) + n\sin(t)\cos(nt)\right]$ (Se puede encontrar a partir de las derivadas de $\cos(t)\sin(nt)$) y de $\sin(t)\cos(nt)$)

Entonces

$$c_n = \frac{-2j}{\pi}\left[\frac{A}{1-n^2}\left[-\cos(t)\sin(nt)+n\sin(t)\cos(nt)\right]\Big|_0^{\pi/6} + \frac{-B}{n}\cos(nt)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}\right]$$

Finalmente, como *n* es impar:

$$c_n = \frac{-2j}{\pi}\left[\frac{A}{1-n^2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{6}n)+\frac{n}{2}\cos(n\frac{\pi}{6})\right]+\frac{B}{n}\cos(n\frac{\pi}{6})\right]$$

Se observa que $c_{-n} = -c_n$ y el desarrollo en serie de Fourier queda:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jnt}$$

En la sumatoria sólo deben considerarse los términos para *n* impar.

Para evaluar c_n con $n = \pm 1$ hay que tomar el límite $n \to \pm 1$.

Así:

$$c_1 = \frac{-2j}{\pi}\left[\frac{A}{2}(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})+B\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

1.2 (1 pto)

Calcule la amplitud del tercer armónico para *B* =0,5*A*.

En la expresión anteriormente encontrada hay que reemplazar $n = 3$ y B =0,5A

$$c_3 = \frac{-2j}{\pi}\left[\frac{-A}{8}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{2})\right]+\frac{A}{6}\cos(\frac{\pi}{2})\right] = \frac{2Aj}{\pi}\left[\frac{1}{8}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right] = \frac{-2Aj\sqrt{3}}{\pi\cdot 8\cdot 2} = \frac{-Aj\sqrt{3}}{8\pi}$$

1.3 (1 pto)

Si la entrada de un sistema con función de transferencia $H(s)$ es $e^{j\omega_0 t}$, entonces su respuesta en regimen permanente es $H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$. Entonces

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow [H(s)] \rightarrow y_p(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Luego, como el sistema es lineal, para la entrada $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ tenemos

$$x(t) \rightarrow [H(s)] \rightarrow y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{2}{1+jn} e^{jnt}$$

La condición para que este resultado sea válido es que el sistema sea estable, esto es, que la parte real de los polos de $H(s)$ sean negativos.

En este caso el polo es único, y la condición se cumple pues:

$$1 + T \cdot s = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{T} = -1 < 0$$

PROBLEMA 2

2.1 (2 ptos.)

Aplicamos la definición de la transformada de Fourier.

Como la señal x(t) tiene valor 1 para -1/2 <x<1/2 y 0 para el resto, tenemos lo siguiente:

$$X(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} dt$$

Desarrollando nos queda:

$$X(\omega) = \left(\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right)_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

Evaluando:

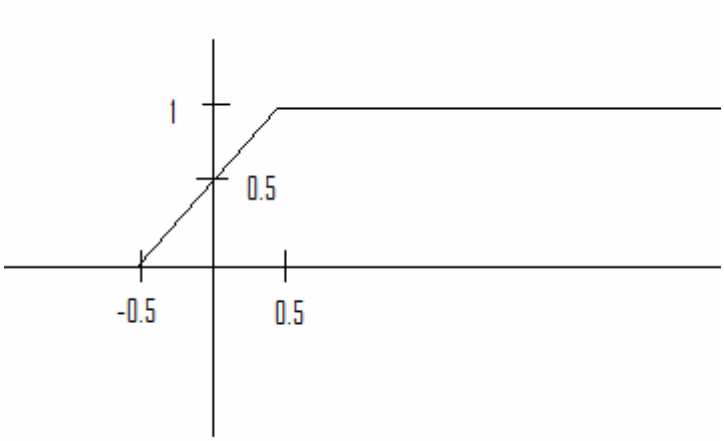
$$X(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = Sa(\frac{\omega}{2})$$

2.2 (2 ptos)

Esta pregunta se puede hacer de varias maneras. Utilizaremos la propiedad de la integral y la del desplazamiento:

Sea z(t) la integral de la función x(t) .

Función z(t):



Notamos que podemos escribir la función y(t) como la diferencia de 2 funciones

$$y(t) = z(t - 0.5) - z(t - 2.5)$$

Utilizando la propiedad de la integral y del desplazamiento podemos obtener Y(ω).

Propiedad de la integral:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

X(0)=1 quedándonos:

$$Z(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Además la propiedad del desplazamiento dice:

$$x(t - t_o) \leftrightarrow X(\omega)\exp(-j\omega t_o)$$

$$z(t - t0) \rightarrow e^{-j\omega t0}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$$

Ahora, reemplazamos:

$$Y(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega}{2})\right] - e^{-j\frac{5\omega}{2}}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega}{2})\right]$$

Finalmente:

$$Y(\omega) = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{5\omega}{2}}}{j\omega}Sa(\frac{\omega}{2}) = \frac{sen\omega\, sen\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}e^{-\frac{3j\omega}{2}}$$

2.3 (2 ptos.)

Para encontrar la respuesta al impulso, lo más fácil es aplicar

$$y(t) = z(t - 0.5) - z(t - 2.5)$$

y recordar que en este caso $z(t)$ es la integral del impulso, es decir, $z(t)$ es la función escalón. De aquí:

$$h(t) = u(t - 0.5) - u(t - 2.5)$$

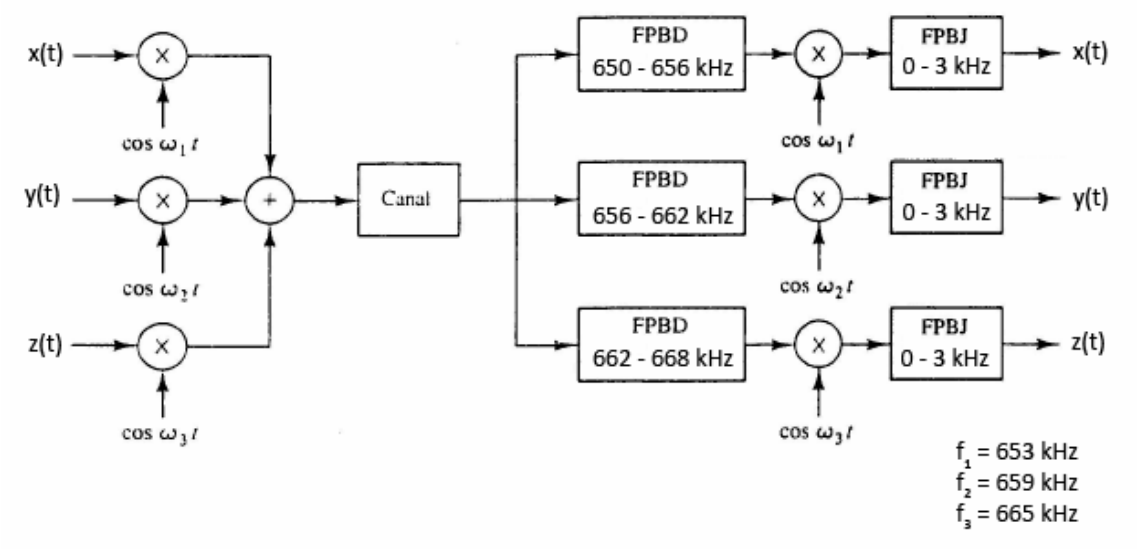
De donde:

$$H(s) = \frac{e^{-0.5s}}{s} - \frac{e^{-2.5s}}{s} = \frac{e^{-0.5s} - e^{-2.5s}}{s}$$

PREGUNTA 3

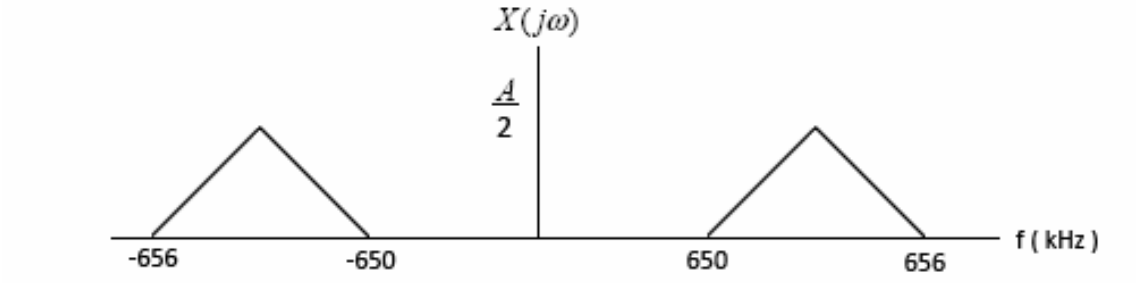
3.1 (2 ptos)

Dado que el ancho del canal es de 18 kHz, y cada señal comprende una banda de 6 kHz, solo existe una forma para modular las señales de manera que no se traslapen. Modulamos la primera señal con una frecuencia de 650 + 3 = 653 kHz, la segunda con una frecuencia de 653 + 6 = 659 kHz, y la tercera con una frecuencia de 659 + 6 = 665 kHz. El diagrama es el siguiente:

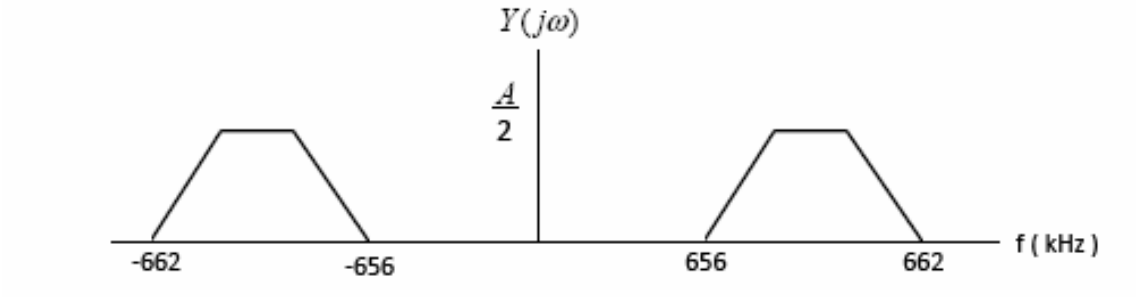


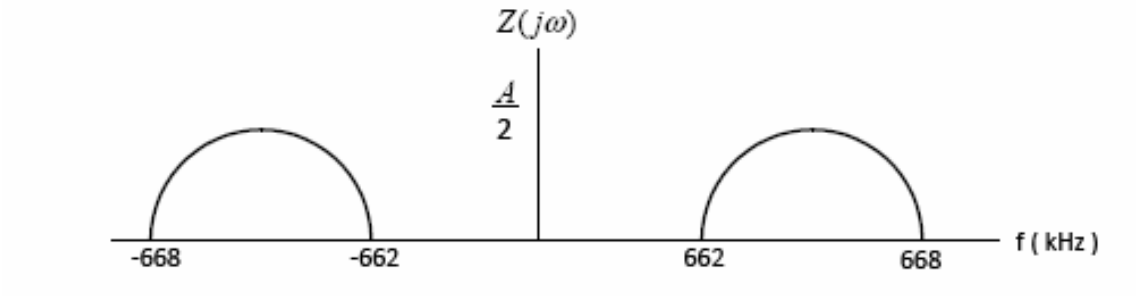
3.2 (2 ptos)

El espectro de la señal x(t) luego de ser modulada:

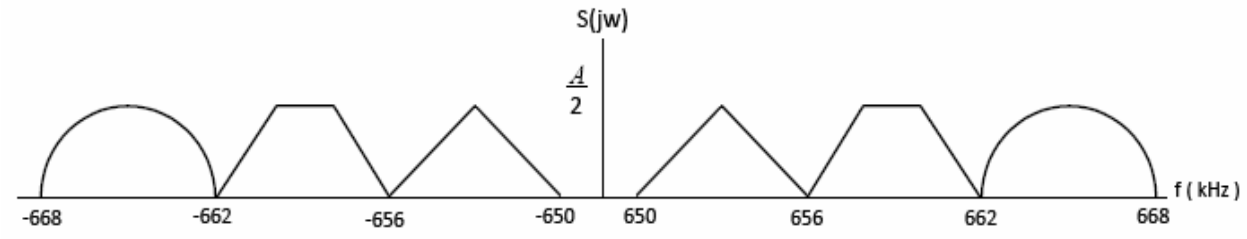


Análogamente para y(t) y z(t):



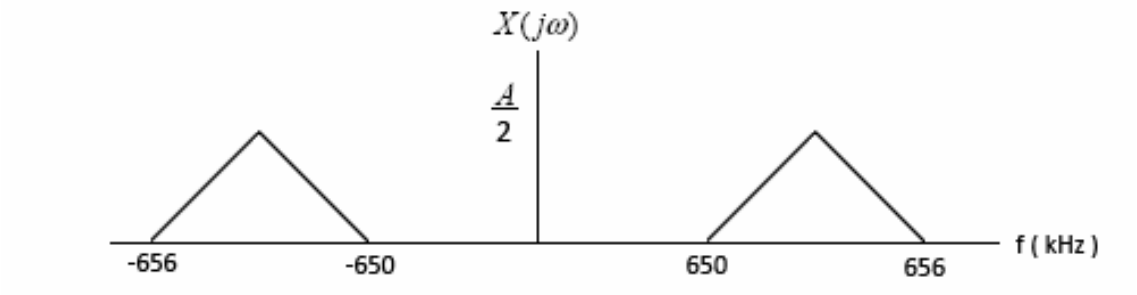


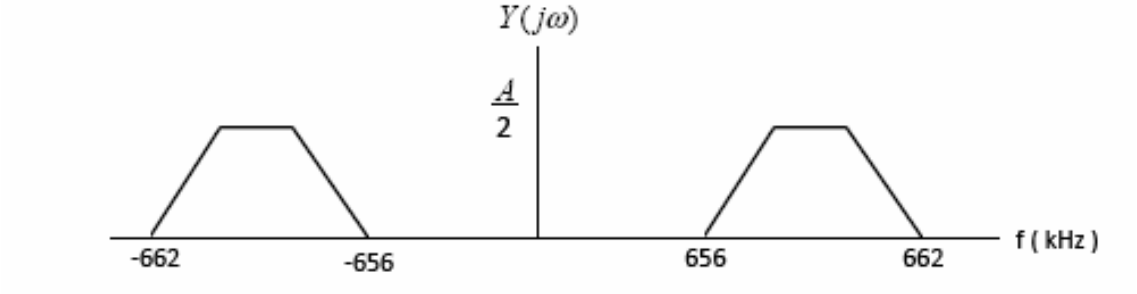
La señal trasmitida por el canal será la suma de las 3 anteriores:

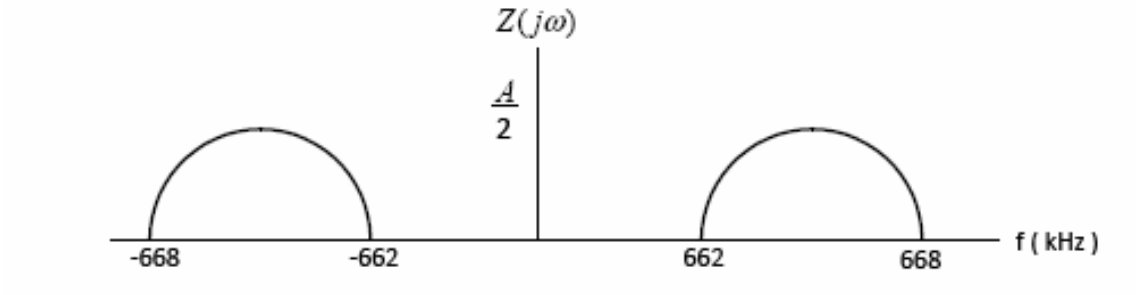


(0.5 ptos por gráficos modulación)

Al aplicar los 3 filtros pasabanda con las frecuencias descritas anteriormente, las señales obtenidas son las mismas que se obtuvieron al modular x(t), y(t) y z(t):

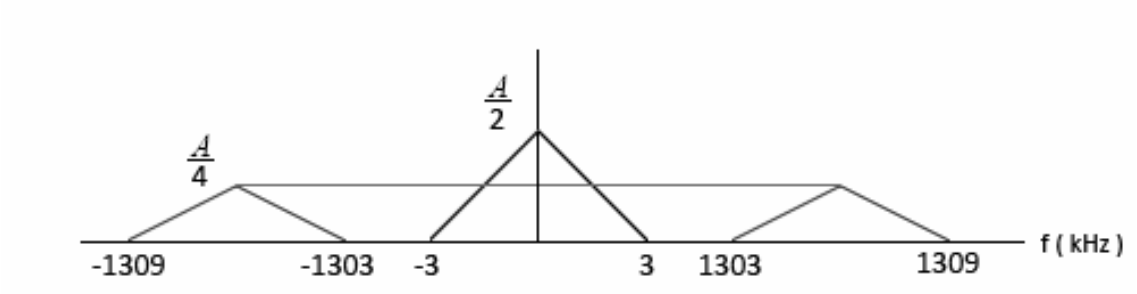




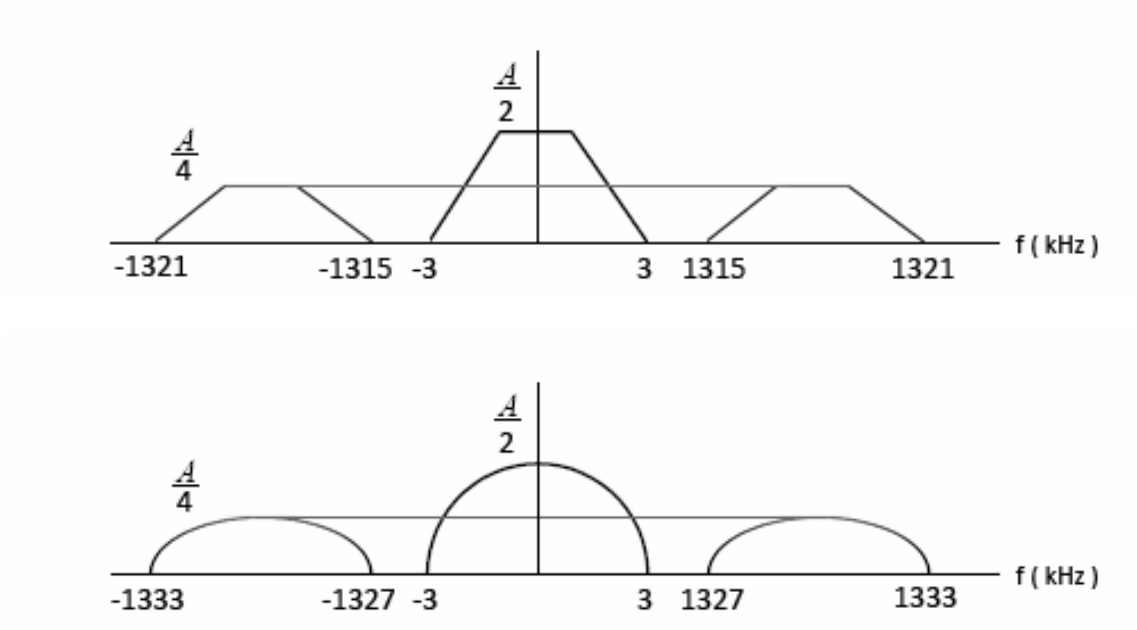


(0.5 ptos por gráficos filtros pasabanda)

Al demodular, o multiplicar nuevamente por el coseno, las señales obtenidas son las siguientes:

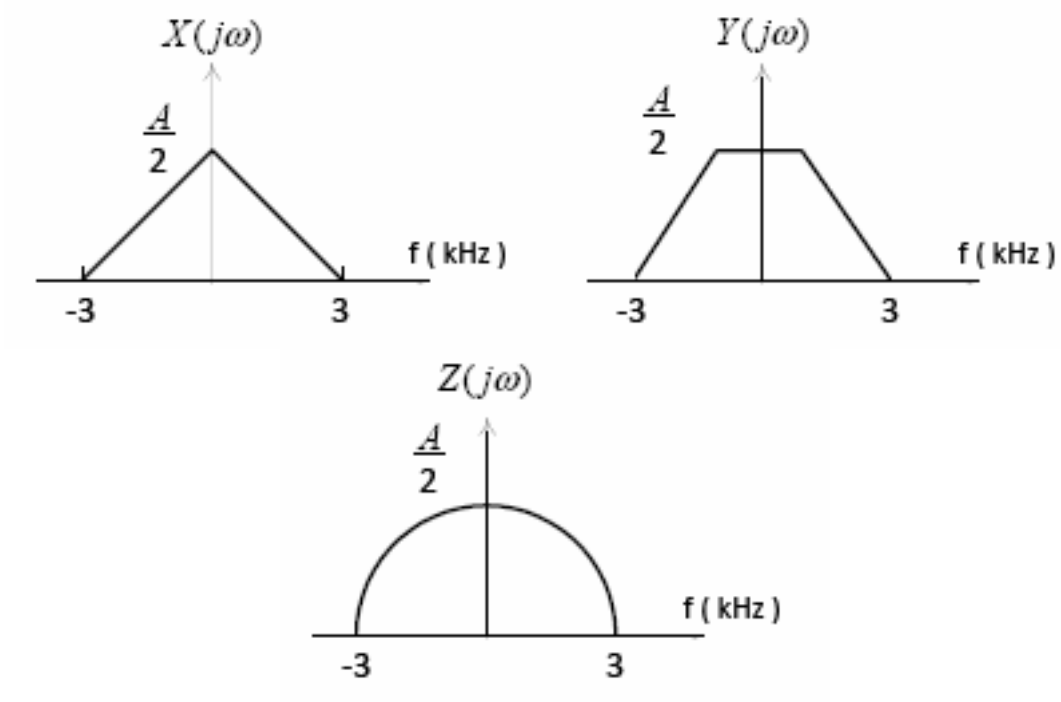


Análogamente para las otras 2 señales:



(0.5 ptos por gráficos demodulación)

Finalmente, al aplicar los filtros pasabajo, obtenemos las señales originales, escaladas por un factor de ½:



(0.5 ptos por gráficos filtros pasabajos)

3.3 (2 ptos)

a) En este caso, el ancho del canal es el mismo, por lo que nuevamente tenemos solo una forma de modular las señales. Las frecuencias de modulación son:

- $f_1 = 550 + 3 = 553$ kHz
- $f_2 = 553 + 6 = 559$ kHz
- $f_3 = 559 + 6 = 565$ kHz

b) En este caso, el ancho del canal es el doble que el anterior, por lo que tenemos más de una forma de modular las señales. Para asegurarse de que las señales moduladas no se traslapen ni excedan los límites del canal, se deben cumplir las siguientes restricciones:

- $f_1 - 3.000 \geq 650.000$
- $f_2 - 6.000 \geq f_1$
- $f_3 - 6.000 \geq f_2$
- $f_3 + 3.000 \leq 686.000$

c) En este caso, el ancho del canal es de 9 kHz, por lo que no es posible enviar las 3 señales simultáneamente.