Ayudantía 10

DFT

Señales y Sistemas

4 de noviembre de 2022

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Resumen: DFT

La **Transformada de Fourier discreta** es para señales que son:

- Periódicas y discretas en el tiempo.
- Periódicas y discretas en la frecuencia.

Se define como:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n] e^{-i2\pi kn/N}$$

Y su inversa:

$$\tilde{f}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}[k] e^{i2\pi kn/N}$$

Siempre considerando que:

$$\mathbf{NUT = 1}$$

Resumen: DFT

La transformada de Fourier discreta se puede expresar en forma matricial:

$$F = \mathcal{W} f$$

Donde:

$$f = [f[0] f[1] f[2] .... f[N-1]]^T$$

$$F = [F[0] F[1] F[2] .... F[N-1]]^T$$

¿Que es $\mathcal{W}$?

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W^{0\cdot 0} & W^{1\cdot 0} & W^{2\cdot 0} & \dots & W^{N-1\cdot 0} \\ W^{0\cdot 1} & W^{1\cdot 1} & W^{2\cdot 1} & \dots & W^{N-1\cdot 1} \\ W^{0\cdot 2} & W^{1\cdot 2} & W^{2\cdot 2} & \dots & W^{N-1\cdot 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{0\cdot N-1} & W^{1\cdot N-1} & W^{2\cdot N-1} & \dots & W^{N-1\cdot N-1} \end{bmatrix}$$

Donde $W = e^{-i2\pi/N}$.

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Ejercicio 1: DFT

Explique la relación entre el periodo de muestreo en el tiempo o espacio (T) y en la frecuencia (U). A partir de esto determine U para $f(t) = sin(\pi t)$ con un número de muestras $N = 32$.

- La DFT es una transformada que asume **periodicidad** tanto en su entrada como en su salida. De esta manera, hay que tener mucho cuidado a la hora de escoger cómo se muestrea la señal de entrada.
- La DFT replicará la función discreta ($f[n] = f(nT)$) para obtener una función periódica y, si las muestras no corresponden a un periodo exacto de la función continua, la función a transformar que interpretará la DFT será distinta a la que realmente es.
- Así, se tiene que el periodo de muestreo en el tiempo o espacio T será el periodo de la función T_f de entrada dividido por el número de muestras N o, lo que es lo mismo, $T = \frac{T_f}{N}$.

Ejercicio 1: DFT

Explique la relación entre el periodo de muestreo en el tiempo o espacio (T) y en la frecuencia (U). A partir de esto determine U para $f(t) = sin(\pi t)$ con un número de muestras $N = 32$.

- Por otro lado, tomar la DFT no es más que aplicar DFFT a una señal muestreada en el espacio o tiempo. Así, por definición, se tiene que el periodo de muestreo en frecuencia U es igual a la frecuencia de la señal a transformar. En otras palabras, $U = \frac{1}{T_f}$. Al reemplazar T_f por NT en esta última expresión, gracias a la primera igualdad, se obtiene que $U = \frac{1}{NT}$. Reordenado se tiene, finalmente, que $NUT = 1$.
- La forma más directa de resolver este problema es determinar la frecuencia de $f(t)$ que en este caso es de 0.5 Hz $(w = 2\pi f = pi)$. Esta frecuencia es U. Además, se puede hacer lo mismo pero con la fórmula $NUT = 1$ donde $N = 32$ y $T = \frac{2}{N}$. Al reemplazar se tiene que $U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{32 \cdot 0.0625} = 0.5\ Hz$.

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Ejercicio 2: DFT

Se tiene G de largo N, que es la DFT de g y además, g se calcula a partir de la acumulación de f que se puede expresar a partir de la siguiente sumatoria:

$$g[n] = \sum_{p=0}^{n} f[p]$$

Determine el producto matricial para obtener la DFT de f (F) a partir de G.

- Es posible escribir matricialmente la señal g, ya que para g[0] es f[0], luego para g[1] es f[0] + f[1], para g[2] es f[0] + f[1] + f[2] y así hasta largo N. Es decir, nuestra matriz para llevar f a g, es una matriz que en la primera fila tiene un 1 en la primera columna, en la segunda fila tiene un 1 en la primera y segunda columna y así. Si N = 3 la matriz sería de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: DFT

- Luego $g[n] = Af[n]$.
- Entonces ahora toca ir multiplicando matrices hasta llegar a lo pedido. Primero multiplicamos por la izquierda por W_n, que sería aplicar DFT a cada lado:

$$W_n g = W_n A f[n]$$

$$G = W_n A f[n]$$

- Dado que lo que buscamos es obtener F a partir de G, debemos despejar primero nuestro f[n].
  Multiplicando por W_n^{-1} por la izquierda.

$$W_n^{-1} G = A f[n]$$

Ejercicio 2: DFT

- Luego multiplicamos por el inverso de A por la izquierda.

$$AW_n^{-1}G = f[n]$$

- Por último, multiplicamos por W_n por la izquierda y así obtenemos F a la derecha.

$$W_n \; A \; W_n^{-1}G = F$$

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Ejercicio 3: DFT

Encuentre la DFT de largo N de $f[n] = cos\frac{4\pi n}{N}$

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Ejercicio 4: DFT

Se tiene la señal continua f(x) = sinc(x). Para muestrearla se define un vector de posiciones de largo N, simétrico en torno al cero.
$x_n = (... - 2.5 - 1.5 - 0.5\ 0.5\ 1.5\ 2.5...)$. Suponga que N es par, de manera que hay tantas muestras antes del cero como después del cero.
Sea F[k] la DFT de f[n] = f(x_n), de donde se obtiene F(u_k) = F[k].
(Extraído de I3-2021-1).

Contenido

1. Resumen: DFT
2. Ejercicio 1: DFT
3. Ejercicio 2: DFT
4. Ejercicio 3: DFT
5. Ejercicio 4: DFT
6. Ejercicio 5: DFT

Ejercicio 5: DFT

Interesa calcular la convolución lineal $g(t) = f(t) * h(t)$. Para eso se muestrean las señales y se usa el sistema "CONV" de la figura, que realiza la operación en el dominio de Fourier, y se espera que g[n] sea una buena aproximación a g(t). Todas las señales discretas son de largo N . Suponga que las señales continuas son causales (es decir, están definidas para t ¿ 0). Como las señales continuas son causales, los ceros deben ir al final, así se mantiene el origen en la primera muestra discreta, tanto para las entradas como para la salida g[n]. (Ejercicio extraído de I3-2021-1).

