

IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 1

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2023
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 36
Fecha: 29/03/2023

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (9 pts.) **Sistemas LTI**. Considere los siguientes sistemas $f \to g$ y determine para todos ellos si son sistemas lineales e invariantes (LTI):
   (a) (3 pts.) $g(t) = \cos(2\pi u f(t) \sqcap(t))$. Este sistema es un modulador FM, tal como sucede en la radio FM, donde la entrada es audio, la salida es la onda en el aire y u es un factor de modulación en frecuencia.
   (b) (3 pts.) $g(x) = f(x) * \cosh(x^2)$, donde $*$ denota la convolución.
   (c) (3 pts.) $g(x) = f(x) \sqcap(x)$

Solución

(a) El sistema claramente no es homogéneo, por lo que no es lineal

$$af(t) \to \cos(2\pi u a f(t) \sqcap(t)) \neq a\cos(2\pi u f(t) \sqcap(t)) = ag(t) \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

El sistema es variante porque

$$f(t-\tau) \to \cos(2\pi u f(t-\tau) \sqcap(t)) \neq \cos(2\pi u f(t-\tau) \sqcap(t-\tau)) = g(t-\tau) \to \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) El sistema está definido por una convolución, la cual es una operación lineal e invariante, por lo que el sistema es lineal e inviariante $\to \boxed{\textbf{3 pts.}}$

(c) El sistema tiene la forma de una proporción directa, por lo que es lineal $\to \boxed{\textbf{2 pts.}}$. Además, es variante, porque

$$f(x-\xi) \to f(x-\xi) \sqcap(x) \neq f(x-\xi) \sqcap(x-\xi) = g(x-\xi) \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

2. (9 pts.) **Integrador**. Considere el sistema integrador $f \to g$ determinado por la siguiente ecuación

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi$$

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

(a) (1 pto.) Muestre que el sistema integrador es equivalente a convolucionar con un escalón.

(b) (2 pts.) Determine la salida del sistema cuando la entrada es un escalón de la forma $\sqcap(\alpha x)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

(c) (2 pts.) Determine la salida del sistema cuando la entrada es un impulso.

(d) (2 pts.) Determine la salida del sistema cuando la entrada es $\sqcap(\frac{x-1}{2})$.

(e) (2 pts.) Determine si este sistema es lineal e invariante.

Solución

(a) El sistema que convoluciona la entrada con un escalón es

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\sqcap(x-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

por lo que vemos que es equivalente al sistema integrador → **1 pt.**

(b) En este caso

$$g(x) = \sqcap(\alpha x) * \sqcap(x) = \sqcap(x) * \sqcap(x) = x\sqcap(x) = \text{rampa}(x) \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

(c) Ahora, como el impulso es el operador identidad de la convolución

$$g = \delta * \sqcap(x) = \sqcap \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

(d) En este caso tenemos

$$g(x) = \sqcap(\frac{x-1}{2})\sqcap(x) = x\sqcap(x) - (x-2)\sqcap(x-2) = \text{rampa}(x) - \text{rampa}(x+2) \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

(e) Como el sistema está definido por una convolución con una respuesta al impulso fija, que es una operación lineal e invariante, es sistema es lineal e invariante. Otra argumentación es la siguiente: el integrador es claramente lineal, porque la integración como operación matemática es lineal y si las condiciones iniciales son cero, la integración es una operación invariante → **2 pts.**

3. (9 pts.) **Convolución Periódica.** Sean $\tilde{f}_1(t)$ y $\tilde{f}_2(t)$, señales periódicas con periodo común T_0, es posible demostrar que para estas dos señales, el resultado de su convolución no converge, por lo que a veces es útil considerar una forma de convolución especial para estas funciones, denominada *convolución periódica*. Se define la convolución periódica entre $\tilde{f}_1(t)$ y $\tilde{f}_2(t)$ como:

$$\tilde{g}(t) = \tilde{f}_1(t) \circledast \tilde{f}_2(t) = \int_0^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau$$

Notar que integramos sobre exactamente un periodo T_0.

(a) (1 pto.) Demuestre que $\tilde{g}(t)$ es periódica con periodo T_0.

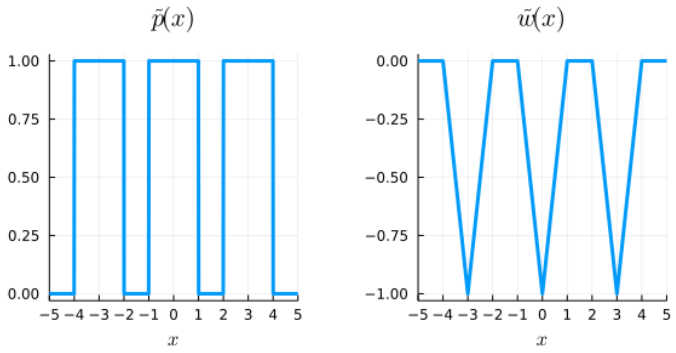
La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

(b) (2 pts.) Considere la señal:

$$\tilde{g}_a(t) = \int_a^{a+T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau$$

Demuestre que $\tilde{g}_a(t) = \tilde{g}(t)$, para un a arbitrario.

(c) (6 pts.) Calcule la convolución periódica de las dos señales en la figura:



Solución

(a) Para probar esto vemos que sucede cuando se retrasa g en un período T_0, es decir $\tilde{g}(t+T_0)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(t) &= \int_0^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
\tilde{g}(t+T_0) &= \int_0^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t+T_0-\tau)d\tau \\
&= \int_0^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
&= \tilde{g}(t)
\end{aligned}$$

→ **1 pt.**

(b) Es este caso simplemente necesitamos hacer un cambio de variables en los intervalos de

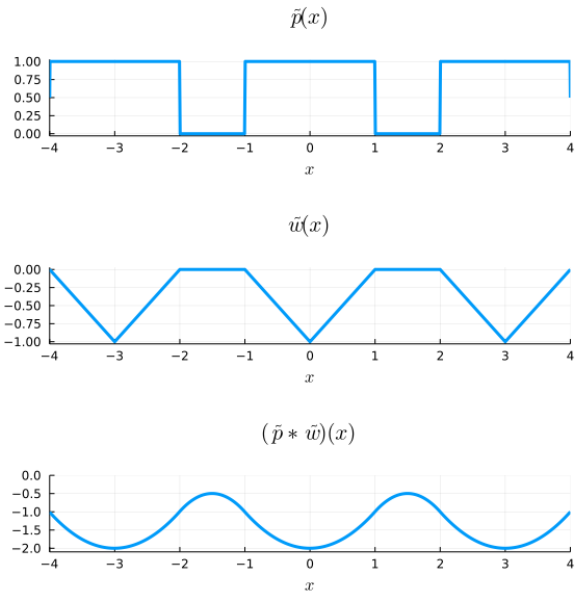
integración:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_a(t) &= \int_a^{a+T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
a &= kT_0 + b, \quad \text{donde } b \in [0, T_0) \\
\tilde{g}_a(t) &= \int_{kT_0+b}^{(k+1)T_0+b} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_b^{T_0+b} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau, \quad \tau' = \tau - b \\
&= \int_b^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau + \int_{T_0}^{T_0+b} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_b^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau + \int_0^{b} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^{T_0} \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)d\tau \\
&= \tilde{g}(t)
\end{aligned}$$

→ **2 pts.**

(c) La convolución circular de un rect con un triángulo da una especie de función cuadrática, que cambia de pendiente, es decir una función suave. En este caso, en cada período estamos convolucionando un rect con un triangulo con amplitud negativa, o bien estamos convolucionando un rect tres veces, con amplitud negativa → **2 pts.**

Gráficamente,



→ **4 pts.**

4. (9 pts.) **Causalidad**.
   (a) (3 pts.) Determine si el concepto de causalidad en un sistema lineal es equivalente a la siguiente frase: para todo tiempo t_0 y cualquier entrada $f(t)$, con $f(t) = 0$ para $t \leq t_0$, la salida $g(t)$ es cero para $t \leq t_0$.
   (b) (3 pts.) De un ejemplo de un sistema causal y no lineal que no cumpla con la condición anterior.
   (c) (3 pts.) De un ejemplo de un sistema no lineal que cumpla con esta condición pero que no sea causal.

Solución

(a) Como el sistema es lineal, entonces debe ser homogéneo por lo que $0 = 0f(t) \to 0g(t) = 0$, es decir, si la entrada es cero, por homogeneidad, la salida debe ser cero → **1 pt.** Como la entrada es cero hasta t_0, entonces la salida para el mismo intervalo debe ser cero, lo que define que el sistema sea causal → **2 pts.**

(b) Un sistema afín, por ejemplo $g(t) = f(t) + a$, con $a \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, no es lineal, por que no es homogéneo → **1 pt.** Es además un sistema causal por que la salida no anticipa a la entrada → **1 pt.** Pero en este caso si la entrada es cero, la salida es a, lo que no cumple con la condición anterior → **1 pt.**

(c) El sistema $g(t) = f(t)f(t+1)$ es no lineal → **1 pt.** y además es no causal porque la salida anticipa la entrada → **1 pt.** Sin embargo, en este caso si la entrada es cero, la salida es cero, por lo que sí cumple con la condición anterior → **1 pt.**