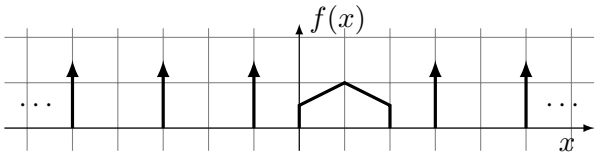
Prueba 2 Solución

1. [6 ptos] *Casita en el bosque.* Encuentre la transformada de Fourier de $f(x) \in \mathbb{R}$ tal como se define en el gráfico (la cuadrícula define cuadrados de 1×1).



Solución:

Primero expresamos analíticamente la función, centrada en cero. Sea un bosque

$$f_b(x) = \frac{1.5}{2} \text{Ш}(\frac{x}{2}) - 1.5\delta(x)$$

y sea una casita

$$f_c(x) = 0.5 \sqcap (\frac{x}{2}) + 0.5 \wedge (x)$$

La transformada de Fourier (sin trasladar todavía) será

$$F(u) = 1.5\text{Ш}(2u) - 1.5 + \text{sinc}\, 2u + 0.5\, \text{sinc}^2 u$$

Y trasladando a la derecha en 1, tenemos

$$F(u) = (1.5\text{Ш}(2u) - 1.5 + \text{sinc}\, 2u + 0.5\, \text{sinc}^2 u)e^{-i2\pi u}$$

2. [6 ptos] *Linear Canonical Transform.* Se define la LCT de $f(x)$ como

$$F_{\mathbf{M}}(u) = \frac{1}{\sqrt{ib}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\pi \frac{1}{b}(du^2 - 2ux + ax^2)}\, dx$$

con los parámetros a, b y d agrupados en la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene determinante $|\mathbf{M}| = 1$ (por lo que el parámetro c queda definido por $ad - bc = 1$. Además supondremos que $b \neq 0$.

   (a) [2 ptos] Encuentre $\mathbf{M}_1$ para que la LCT sea equivalente a una transformada de Fourier.
   Solución: Para que sea la transformada de Fourier, la exponencial compleja no puede depender de los términos cuadráticos, por lo que $d = a = 0$, y $b = 1$, con lo que la LCT sería

$$F_{\mathbf{M}_1}(u) = \frac{1}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux}\, dx$$

   es decir,

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $c = -1$ para que el determinante valga 1.

(b) [2 ptos] Encuentre $\mathbf{M}_2$ para que la LCT sea equivalente a una transformada de Fourier inversa.

Solución: Para la inversa, necesitamos conjugar las bases, es decir $b = -1$, de donde

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que la LCT será

$$F_{\mathbf{M}_1}(u) = \frac{1}{\sqrt{-i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i2\pi ux}\, dx$$

También se puede comprobar que

$$\frac{1}{\sqrt{i}} \frac{1}{\sqrt{-i}} = 1$$

(c) [2 ptos] Encuentre $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$.

Solución:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1^{-1}$.

3. [6 ptos] *Difusión.* La ecuación de propagación que describe la difusión en agua libre es

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

donde D es el coeficiente de difusión, y x la distancia recorrida por una partícula en un tiempo t. Es decir, $p_t(x)$ se interpreta como la probabilidad de que una partícula esté en la posición x, transcurrido un tiempo t. Nótese que esta es la distribución de probabilidades Gaussiana con $\sigma_x^2 = 2Dt$. A medida que transcurre el tiempo, la distribución se hace más ancha.

(a) [3 ptos] Encuentre $P_t(u)$, la transformada de Fourier del propagador.

Solución: Comenzando de un par conocido, y aplicando propiedades, tenemos

$$\begin{aligned} e^{-\pi x^2} &\longrightarrow e^{-\pi u^2} \\ e^{-\pi(x/\sqrt{4\pi Dt})^2} &\longrightarrow \sqrt{4\pi Dt} e^{-\pi(\sqrt{4\pi Dt}u)^2} \\ e^{-x^2/(4Dt)} &\longrightarrow \sqrt{4\pi Dt} e^{-4\pi^2 Dtu^2} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)} &\longrightarrow e^{-4\pi^2 Dtu^2} \end{aligned}$$

Es decir

$$P_t(u) = e^{-4\pi^2 Dtu^2}$$

(b) [3 ptos] Encuentre el producto de las desviaciones estándares de $p_t(x)$ y de $P_t(u)$: $\sigma_x \sigma_u$.

Solución: Para encontrar la desviación estándar, colocamos $P_t(u)$ en la forma de una distribución Gaussiana:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Por inspección tenemos

$$\frac{1}{2\sigma_u^2} = 4\pi^2 Dt$$

De donde

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{8\pi^2 Dt}$$

Finalmente, el producto de las desviaciones es:

$$\sigma_x \sigma_u = \sqrt{2Dt} \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 Dt}} = \frac{1}{2\pi}$$

Lo interesante es que este producto es constante, una manifestación del principio de incertidumbre: si aumenta la precisión en frecuencia ($\sigma_u \downarrow$) entonces disminuye la precisión en el espacio ($\sigma_x \uparrow$).