Prueba 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y otros apuntes.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

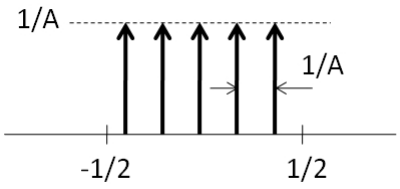
---

1. [5 ptos] **Transformada de Fourier.** Encuentre y grafique la transformada de Fourier de

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(x - Ak)$$

Resultado:

$$f(x) = \frac{1}{A} \text{Ш}(\frac{x}{A}) * \operatorname{sinc} x$$
$$F(u) = \text{Ш}(Au) \sqcap (u)$$



2. [5 ptos] **Transformada de Fourier.** Encuentre la transformada de Fourier de

$$f(x) = e^{iax}\text{sgn}(bx + c).$$

Resultado: Comenzando con el par conocido para sgn, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{sgn}(x) &\longrightarrow -\frac{i}{\pi u} \\
\text{sgn}(bx) &\longrightarrow -\frac{b}{|b|}\frac{i}{\pi u} \\
\text{sgn}(bx + c) = \text{sgn}(b(x + c/b)) &\longrightarrow -e^{i2\pi uc/b}\frac{b}{|b|}\frac{i}{\pi u} \\
e^{iax}\text{sgn}(bx + c) &\longrightarrow -e^{i2\pi(u-a/2\pi)c/b}\frac{b}{|b|}\frac{i}{\pi(u - a/2\pi)}
\end{aligned}$$

3. **Linealidad de Laplace.**

(a) [5 ptos] Demuestre que la transformada de Laplace es un operador lineal.

Resultado: De la definición se puede verificar trivialmente que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}(af(t)+bg(t))e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}af(t)e^{-st}dt+\int_{-\infty}^{\infty}bg(t)e^{-st}dt \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt+b\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-st}dt \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

(b) [2 ptos] Encuentre un ejemplo de dos funciones en que la región de convergencia de la suma de ellas sea distinta a la intersección de las regiones de cada una de las funciones por separado.

Resultado: La única posibilidad para que eso suceda es que haya cancelación de polos. Por ejemplo, Sea (con $b > a$)

$$F(s) = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \qquad a < \sigma < b$$

y

$$G(s) = -\frac{1}{s-b} \qquad \sigma < b$$

Entonces

$$H(s) = F(s) - G(s) = \frac{1}{s-a} \qquad a < \sigma$$

La intersección de las regiones de convergencia es $a < \sigma < b$, sin embargo la región de convergencia de $H(s)$ es $a < \sigma$.

Las funciones en el tiempo son $f(t) = e^{bt}\sqcap(-t) + e^{at}\sqcap(t)$, $g(t) = e^{bt}\sqcap(-t)$ y $h(t) = e^{at}\sqcap(t)$

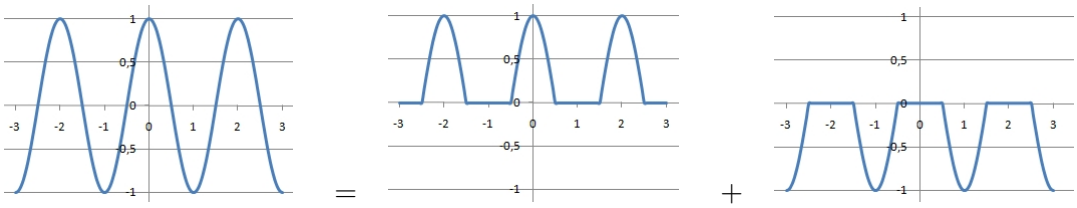
4. [10 ptos] **Convolución cíclica.** Se tiene $x[n] * y[n] = z[n]$, con las tres señales de largo N. Encuentre la matriz $\boldsymbol{A}$ de manera que la siguiente expresión para la convolución (multiplicación matricial) sea verdadera: $\boldsymbol{A}y = z$.

Resultado: La ecuación matricial debe ser

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_{N-1} & x_{N-2} & \dots \\ x_1 & x_0 & x_{N-1} & \dots \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots \\ \dots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Es decir la matriz debe ser una matriz circulante formada por el vector x.

5. [5 ptos] **Descomposición.** La función coseno se puede descomponer como $\cos \pi x = a(x) + b(x)$ como se indica en los gráficos (en el mismo orden)



Encuentre las transformadas de Fourier $A(u)$ y $B(u)$ de $a(x)$ y $b(x)$. Grafique aproximadamente $A(u)$, $B(u)$ y $A(u) + B(u)$.

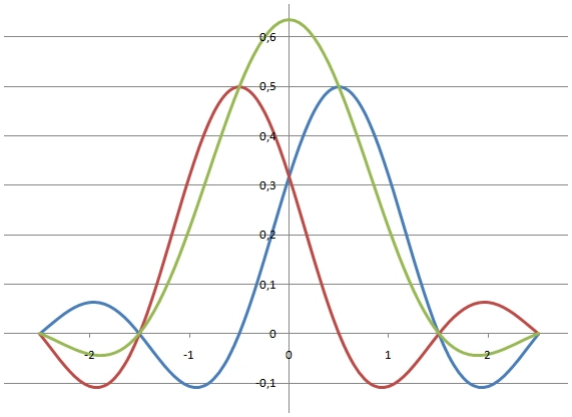
Resultado: $a(x)$ se puede expresar como

$$a(x) = [\sqcap(x) \cos \pi x] * \frac{1}{2} \text{Ш}(\frac{x}{2})$$

cuya transformada de Fourier es

$$A(u) = [\operatorname{sinc} u * \uparrow\uparrow (u)] \text{Ш}(2u)$$

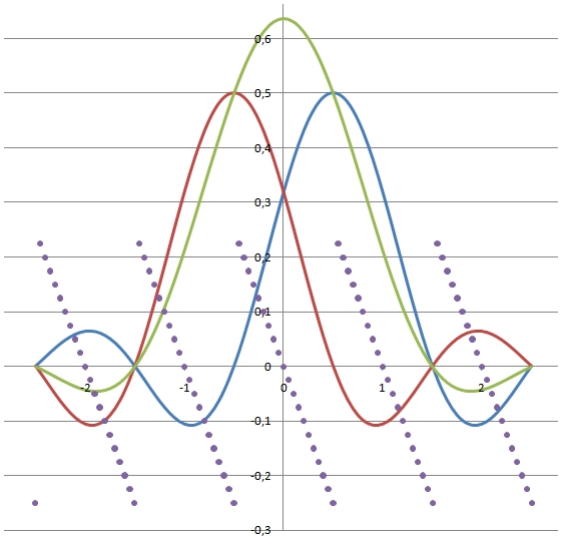
El gráfico de $A(u)$, antes de multiplicar por shah, se puede obtener sumando dos sincs desplazado. Lo importante es notar que esa suma cruza por cero en los "y medio", excepto en 1/2 y -1/2.



Por otro lado $b(x) = -a(x-1)$, es decir,

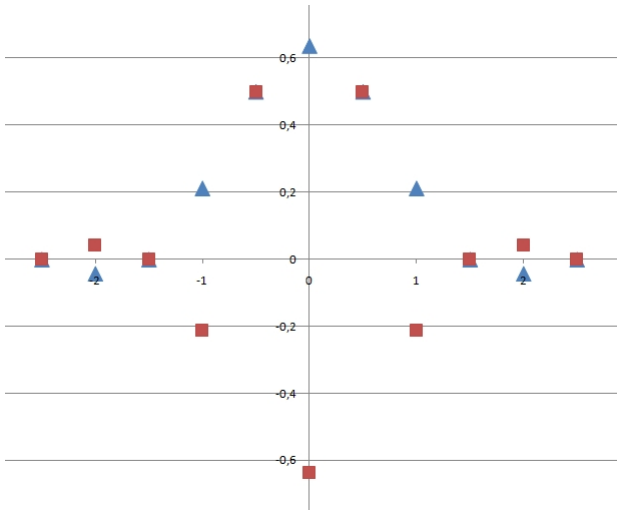
$$B(u) = -e^{-i2\pi u} A(u) = -e^{-i2\pi u} [\operatorname{sinc} u * \uparrow\uparrow (u)] \text{Ш}(2u)$$

que se grafica (antes de multiplicar por shah) a continuación (la fase se muestra con puntos y está escalada por 1/4).



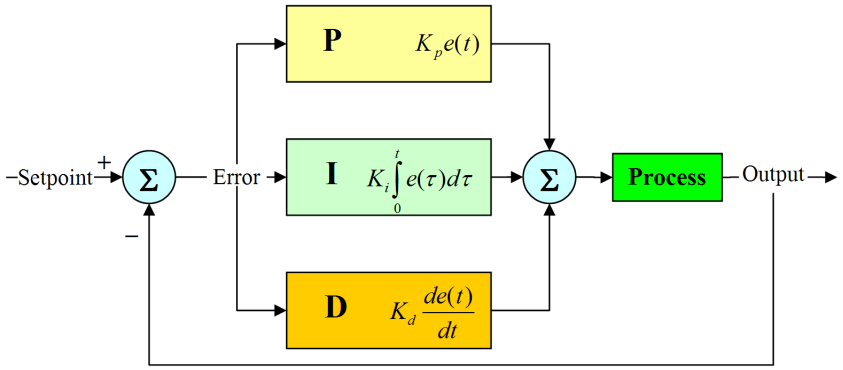
Dado que $\sqcup\!\sqcup(2u)$ es distinto de cero solo en múltiplos de 1/2, los únicos valores relevantes de $e^{-i2\pi u}$ son $\{1, -1, 1, -1, ...\}$. Es decir, los valores en los enteros estarán multiplicados por -1 y los en "y medio" por uno.

Finalmente las dos funciones se grafican como:



Y nótese que la suma cancela todas las muestras, excepto las que están en 1/2 y -1/2 como corresponde para la transformada del coseno.

6. **PID.**[1] La figura describe un controlador PID:



Sea $y(t)$ el "Output" del sistema, $r(t)$ el "Setpoint" o referencia, $e(t)$ el error (diferencia entre la referencia y la salida), $u(t)$ el control o entrada al proceso. La idea del sistema es que el proceso entregue la salida lo más cercana posible a la referencia (con el menor error posible). Para eso el control PID genera una señal de control que es la suma de una parte proporcional al error (P), otra integral (I) y otra diferencial (D).

(a) [2 ptos] Encuentre la función de transferencia, $Q(s)$, del controlador (con entrada $e(t)$ y salida $u(t)$).

Resultado: Por las propiedades de la transformada de Laplace, la función de transferencia será

$$Q(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s$$

(b) [2 ptos] Encuentre la funcion de transferencia, $H(s)$, del sistema completo (con entrada $r(t)$ y salida $y(t)$). Suponga que el proceso es causal y que la función de transferencia es $P(s)$.

Resultado: Del diagrama se observa

$$Y(s) = Q(s)P(s)E(s) = Q(s)P(s)(R(s) - Y(s))$$

De donde se puede despejar $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{Q(s)P(s)}{1 + Q(s)P(s)} R(s)$$

Es decir la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{Q(s)P(s)}{1 + Q(s)P(s)}$$

[1] Imagen tomada de Wikipedia, autor: Pieter Kuiper

(c) [2 ptos] Si $K_i = K_d = 0$, encuentre el valor final de $y(t)$ ($t \to \infty$) cuando la referencia es un escalón. Suponga que la función de transferencia del proceso en cero vale 1 ($P(0) = 1$).

Resultado: Con solo el efecto proporcional la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)}$$

Y como la transformada de Laplace del escalón es $1/s$, la salida será

$$Y(s) = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)} \frac{1}{s}$$

Para encontrar el valor final ocupamos la propiedad

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

es decir

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)} \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{K_p P(0)}{1 + K_p P(0)} = \frac{K_p}{1 + K_p}$$

Nótese que el valor no tiende a 1 y tiene un error residual (eso justifica la acción integral, que veremos a continuación).

(d) [2 ptos] Repita (c), pero ahora agrendo la parte integral, es decir, solo $K_d = 0$.

Resultado: Siguiendo el mismo desarrollo tenemos

$$H(s) = \frac{(K_p + K_i \frac{1}{s}) P(s)}{1 + (K_p + K_i \frac{1}{s}) P(s)}$$

es decir

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{(K_p + K_i \frac{1}{s})}{1 + (K_p + K_i \frac{1}{s})} = 1$$

Dado que K_p y 1 son insignificantes a lado de $K_i \times \infty$ (coloquialmente).

En resumen la acción integral eliminó el sesgo y ahora el sistema sí converge a la referencia.