Prueba 5 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [4 ptos] Demuestre el teorema del valor final para la transformada Z:

$$\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Resultado: Los teoremas de valor inicial (y final) solo son válidos para la definición unilateral de la transformada Z (al igual que para la transformada de Laplace)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Dado que z es un adelanto de la señal, es necesario conocer la transformada Z de $f[n+1]$

$$f[n+1] \longrightarrow zF(z) - zf[0]$$

y la transformada Z de $f[n+1] - f[n]$ es

$$\begin{aligned}
f[n+1] - f[n] \longrightarrow zF(z) - zf[0] - F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)z^{-n} \\
(z-1)F(z) - zf_o &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(f_{n+1} - f_n)z^{-n} \\
\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f_o &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(f_{n+1} - f_n)z^{-n} \\
\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) - f_o &= \lim_{N\to\infty}[-f_o + f[N+1]] \\
\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) &= \lim_{N\to\infty} f[N+1] = \lim_{N\to\infty} f[N]
\end{aligned}$$

2. Grafique las señales $f[n]$ para $n = -2, -1, 0, 1, 2$, cuyas transformadas Z son las siguientes

   (a) [2 ptos]
$$F(z) = \frac{1}{1 - iz^{-1}} \qquad |z| > 1$$

   (b) [2 ptos]
$$F(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} \qquad |z| < 2$$

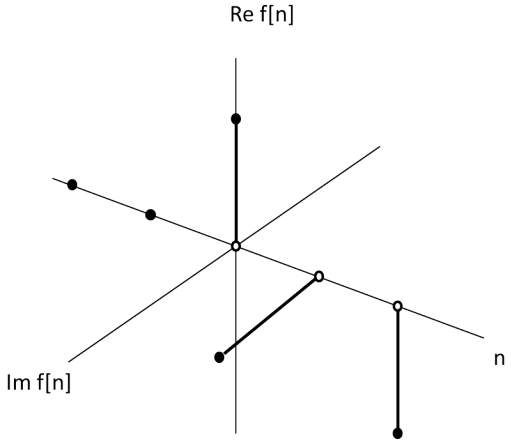
Resultado:

(a) La transformada inversa es conocida

$$f[n] = i^n \sqcap[n]$$

que evaluada en el rango pedido es

$$f[n] = (..., 0,\ 0,\ \underline{1},\ i,\ -1,\ ...)$$



(b) Para encontrar la inversa conviene simplificar

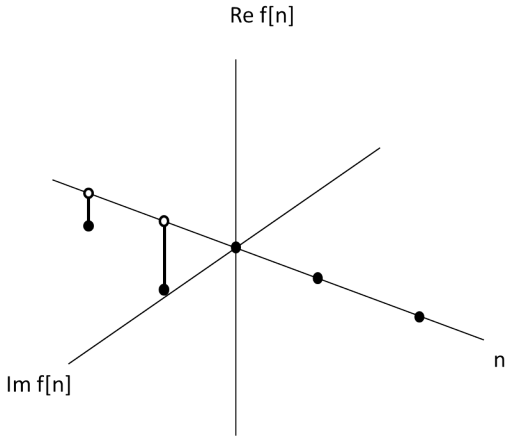
$$\frac{1-2z^{-1}}{1-4z^{-1}+4z^{-2}} = \frac{1-2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

De donde la inversa es trivialmente (notando que la señal tiene que ser izquierda por la ROC)

$$f[n] = -2^n \sqcap[-n-1]$$

que evaluada en el rango pedido es

$$f[n] = (..., -1/4,\ -1/2,\ \underline{0},\ 0,\ 0,\ ...)$$



3. Encuentre por división larga $f[n]$ para $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ si su transformada Z es

(a) [2 ptos]

$$F(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1}} \quad |z| < 4$$

(b) [2 ptos]

$$F(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1}} \quad |z| > 4$$

Resultado: Para $|z| < 4$, es decir, la función no causal, se tiene

$$\begin{array}{l} -2z^{-1}+1 \ : -4z^{-1}+1 \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{8}z - \frac{1}{32}z^2 - \frac{1}{128}z^3 \\ \underline{-2z^{-1} + \frac{1}{2}} \\ \qquad \frac{1}{2} \\ \qquad \underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}z} \\ \qquad\quad \frac{1}{8}z \\ \qquad\quad \underline{\frac{1}{8}z - \frac{1}{32}z^2} \\ \qquad\qquad \frac{1}{32}z^2 \end{array}$$

Es decir, los valores pedidos de la función son $f[n] = (-\frac{1}{128},\ -\frac{1}{32},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0)$

Para $|z| > 4$, es decir, la función causal, se tiene

$$\begin{array}{l} 1-2z^{-1} \ : 1 - 4z^{-1} = \ 1 + 2z^{-1} + 8z^{-2} + 32z^{-3} \\ \underline{1 - 4z^{-1}} \\ \quad 2z^{-1} \\ \quad \underline{2z^{-1} - 8z^{-2}} \\ \qquad 8z^{-2} \\ \qquad \underline{8z^{-2} - 32z^{-3}} \\ \qquad\quad 32z^{-3} \end{array}$$

Es decir, los valores pedidos de la función son $f[n] = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 8,\ 32)$

4. Se tiene un sistema que calcula el promedio móvil de las últimas M muestras de la entrada.

   (a) [3 ptos] Encuentre la función de transferencia en el dominio Z.

   (b) [3 ptos] Dibuje el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia.

   Resultado: Si $f[n]$ es la entrada, el promedio móvil se calcula como

$$g[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f[n-k]$$

que corresponde a convolucionar con M unos

$$h[n] = (\underline{1},\ 1,\ 1,\ ...,\ 1,\ 0,\ ...)$$

La función de transferencia será

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} \quad \forall z \\ H(z) &= \frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

Los ceros son las M raíces de la unidad

$$p_k = e^{i2\pi k/M} \qquad k = 0...M-1$$

y habrá un polo (exceptuando el origen) en $z = 1$ que cancela el cero en esa misma posición. Es decir, los ceros son

$$p_k = e^{i2\pi k/M} \qquad k = 1...M-1$$

