Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2008-2

INTERROGACION Nº 3

1. Considere un sistema de tiempo discreto cuya función de transferencia está dada por:

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{d + cz + z^2}$$

1.1 Si x designa a la variable de entrada e y designa a la variable de salida, cuál es la ecuación en diferencias que satisfacen?

1.2 Dibuje un diagrama de simulación para el sistema de tiempo discreto de función de transferencia $H(z)$.

1.3 Suponga que los coeficientes a, b, c, d son reales y cumplen $d = b, c = a$. Dibuje el diagrama de amplitud y fase de $H(z)$ para $z = e^{j\Omega}$. Que característica presenta el sistema en este caso? A qué se debe esta característica?

1.4 Para el caso 1.3, determine y dibuje la función respuesta al impulso de $H(z)$.

2. Plantee y demuestre la relación que satisfacen S_1 y S_2, en que: $S_1 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |x(n)|^2$; $S_2 = \int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$. $X(\Omega)$ corresponde a la Transformada Discreta de Fourier de $x(n)$. Compruebe que la igualdad se cumple para $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

3. Considere la señal analógica $x_a(t) = 2sen(\omega_o t) + 3\cos(\omega_o t)$, con $\omega_o = 100\pi \; rad/seg$. Designe con $x(n)$ a la señal x_a muestreada a una frecuencia ω_s.

3.1 Dibuje la amplitud del espectro de frecuencia de la señal x_a.

3.2 Dibuje la amplitud del espectro de frecuencia de $x(n)$ para los siguientes casos: a) $\omega_s = 0{,}5\omega_o$; b) $\omega_s = 2\omega_o$; c) $\omega_s = 8\omega_o$. Qué concluye de su análisis?

3.3 Cuantas muestras obtiene por ciclo de la señal, si emplea como periodo de muestreo $T_s = 5 \; mseg$? Utilice el resultado de 3.2 para dibujar el espectro de frecuencia de $x(n)$.

3.4 Repita 3.3 para $T_s = 3{,}33 \; mseg$. Qué concluye?

Observaciones

Tiempo: 2 horas. Consultas sobre aclaraciones de enunciado sólo pueden realizarse al profesor y en los primeros 15 min. No puede hacerse uso de material impreso, excepto de una hoja tamaño carta que contenga sólo fórmulas, la que debe ser entregada junto con sus respuestas. Si requiere información complementaria para resolver un problema, agregue la que Usted considere más apropiada y especifíquelo en su respuesta. Responda cada pregunta en hojas separadas. Recuerde escribir su nombre en cada hoja.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2008-2

PAUTA INTERROGACION Nº 3

Problema 1

1.1 (1,5 ptos.)

Tenemos que:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}, \text{ con } H(z)=\frac{1+az^{-1}+bz^{-2}}{d+cz+z^{2}}$$

Entonces:

$$Y(z)(d+cz+z^{2})=X(z)(1+az^{-1}+bz^{-2})$$

La ecuación en diferencias asociada al sistema discreto con función de transferencia $H(z)$ es:

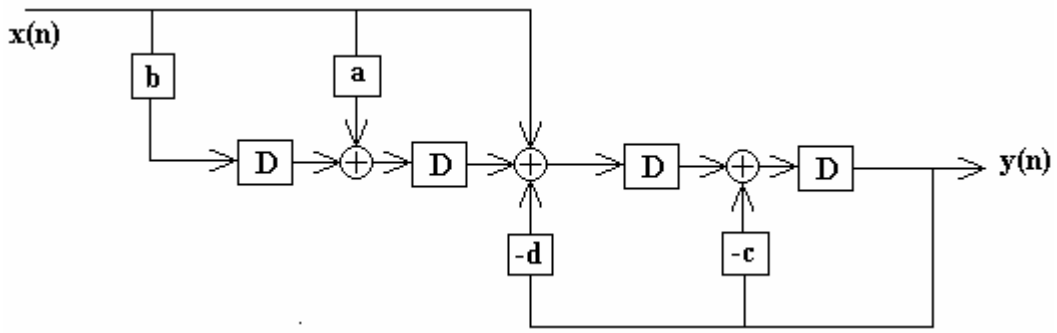
$$y(n+2)+cy(n+1)+dy(n)=x(n)+ax(n-1)+bx(n-2)$$

O bien

$$y(n)+cy(n-1)+dy(n-2)=x(n-2)+ax(n-3)+bx(n-4)$$

1.2) (1,5 ptos.)

Utilizamos la segunda expresión obtenida en 1.1. Luego el diagrama de simulación es:



Este diagrama también puede dibujarse reemplazando D por z^{-1}.

1.3) (1,5 ptos.)

Bajo $d = b, c = a$ y $z = e^{j\Omega}$, tenemos que la función $H(\cdot)$ se expresa como:

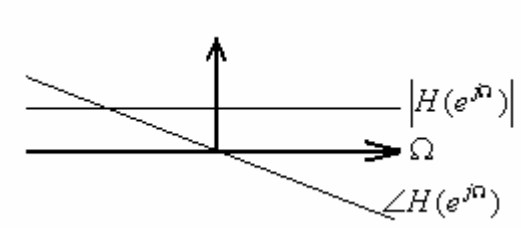
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 + ae^{-j\Omega} + be^{-2j\Omega}}{b + ae^{j\Omega} + e^{2j\Omega}}$$

Ahora multiplicamos por $\frac{e^{2j\Omega}}{e^{2j\Omega}}$, entonces

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{2j\Omega} + ae^{j\Omega} + b}{(b + ae^{j\Omega} + e^{2j\Omega})e^{2j\Omega}} = e^{-2j\Omega}.$$

Luego la amplitud y fase de $H(\cdot)$ son

$$|H(e^{j\Omega})| = 1$$
$$\angle H(e^{j\Omega}) = -2\Omega$$



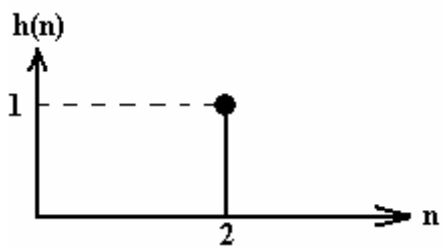
La característica del sistema es que es un "filtro pasa todo", pues $|H(e^{j\Omega})| = 1$, y que es también un retardo puro, pues $\angle H(e^{j\Omega}) = -2\Omega$.

1.4) (1,5 ptos.)

De:

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{d + cz + z^2} = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{b + az + z^2} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = z^{-2}$$

De lo anterior concluimos que $h(n) = \delta(n-2)$. El gráfico correspondiente es:



Pregunta 2

2.1 (4 ptos.)

La relación pedida es la llamada relación de Parseval y, para la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) es la siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|X(\Omega|^2\, d\Omega$$

Esta relación es un caso particular de:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)g^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)G^*(\Omega)d\Omega$$

La DTFT inversa se define como:

$$x(n) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Multiplicamos a ambos lados por $g^*(n)$ y hacemos la suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ en ambos lados nos queda lo siguiente:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)g^*(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} g^*(n)\int_0^{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}d\Omega$$

Como la integral no depende de n y g*(n) no depende de Ω podemos invertir el orden de suma e integración:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)g^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)\sum_{-\infty}^{\infty} g^*(n)\, e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)g^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)\left[\sum_{-\infty}^{\infty} g(n)\, e^{-j\Omega n}\right]^* d\Omega$$

Sabemos que el término entre paréntesis es la definición de la DTFT de g(n):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)g^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)G^*(\Omega)\, d\Omega$$

Ahora solo debemos tomar g(n)=x(n) y el Teorema de Parseval queda demostrado.

2.2 (2 ptos.)

Buscamos la transformada de $x(n) = (1/2)^n$ por definición

Usando la propiedad geométrica tenemos que:

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - 1/2e^{-j\Omega}}$$

Además:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto solo nos queda hacer la integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 1/2e^{-j\Omega}} \frac{1}{1 - 1/2e^{j\Omega}} \, d\Omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\Omega} d\Omega$$

Para obtener la integral recurriremos a variables auxiliares:

$$\lambda = \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

Entonces:

$$\cos(\Omega) = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \qquad \text{y} \qquad d\Omega = \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2}$$

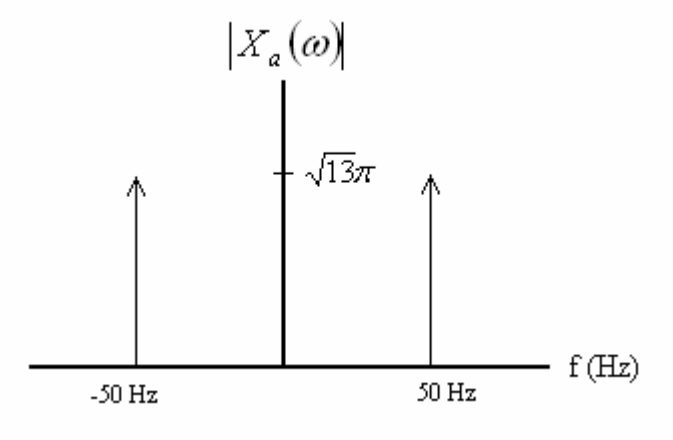
La integral queda:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\Omega} d\Omega = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+9\lambda^2} d\lambda = \frac{8}{3\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{3}\right)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} = \frac{4}{3}$$

Pregunta 3

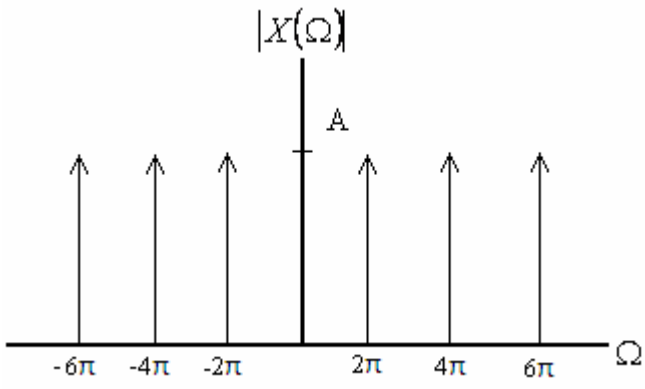
3.1 (1.5 ptos)

Para $x_a(t) = 2\text{sen}(100\pi \cdot t) + 3\cos(100\pi \cdot t) = \sqrt{13}sen(100\pi t + \varphi)$, $\varphi = arctg(3/2)$



3.2 (0.25 ptos por cada gráfico, 0.25 ptos. por cada conclusión)

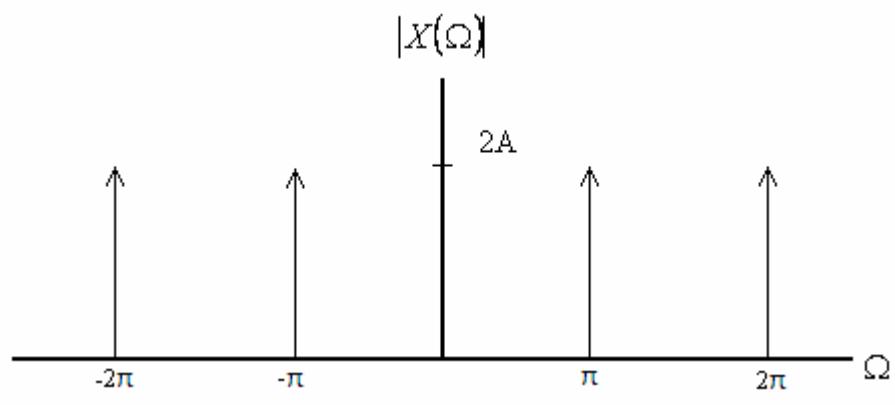
a) $\omega_s = 0.5\omega_0 = 50\pi \frac{rad}{s}$, $T_s = 0.04\ s$



$$A = \frac{\sqrt{13}\pi}{0.04}$$

Se produce solapamiento ya que no se cumple la condición del teorema de Nyquist.

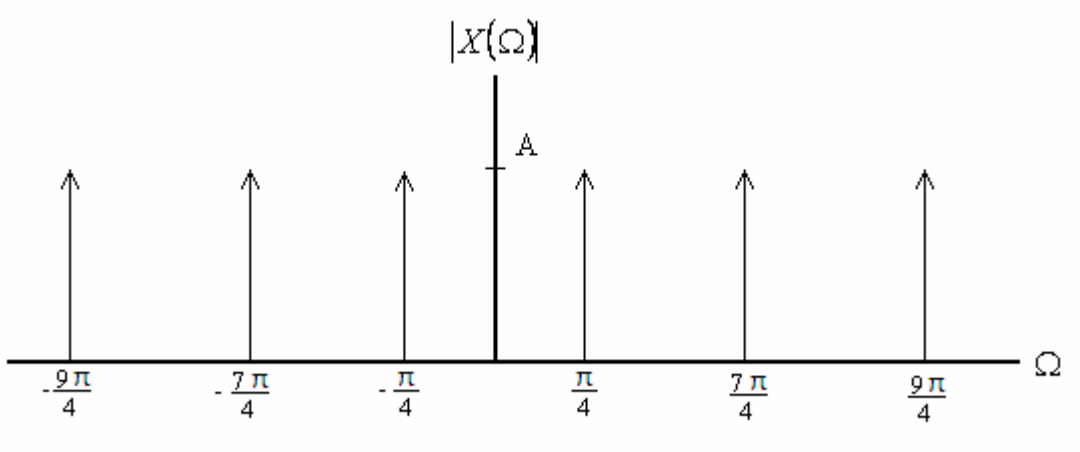
b) $\omega_s = 2\omega_0 = 200\pi \frac{rad}{s}$, $T_s = 0{,}01\ s$



$$A = \frac{\sqrt{13}\pi}{0.01}$$

Se muestrea con la frecuencia de Nyquist, y se cumple la igualdad en el teorema del muestreo. Esto implica que no hay espaciado entre las muestras en el gráfico de amplitud del espectro de frecuencias.

c) $\omega_s = 8\omega_0 = 800\pi \frac{rad}{s}$, $T_s = 0.025\ s$



$$A = \frac{\sqrt{13}\pi}{0.0025}$$

La frecuencia de muestreo es mayor a la frecuencia de Nyquist, por lo que las muestras no se solapan y se podrá recuperar la señal correctamente.

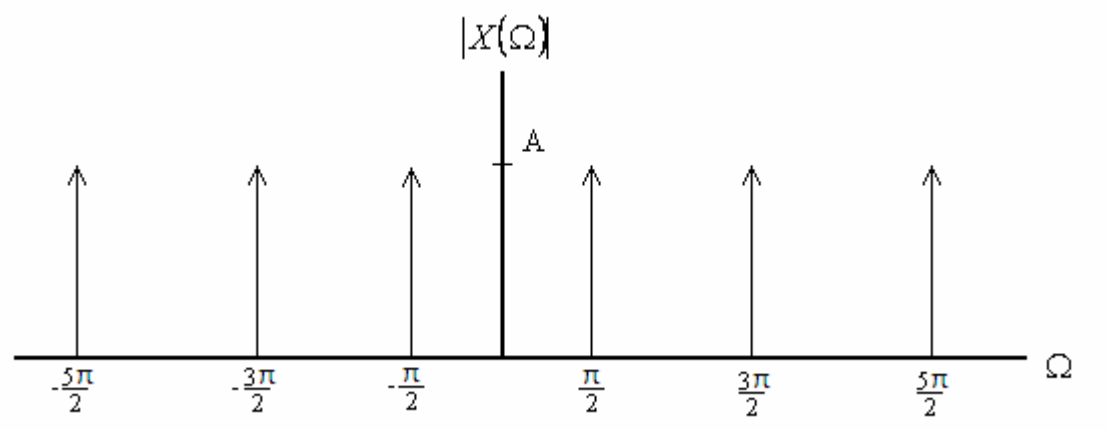
3.3 (1 pto por n° de muestras, 0.5 ptos por gráfico)

Se utiliza un periodo de muestreo de 5 ms, por lo que la frecuencia de muestreo es igual a 200 Hz (200 muestras por segundo).

Por otra parte, la frecuencia de la señal es de 100π rad/s, por lo que su periodo es de 20 ms.

El número de muestras por ciclo de la señal está dado por la multiplicación de estos 2 valores:

$$n = 200 \cdot \frac{20}{1000} = 4 \text{ muestras}$$



$$A = \frac{\sqrt{13}\pi}{0.005}$$

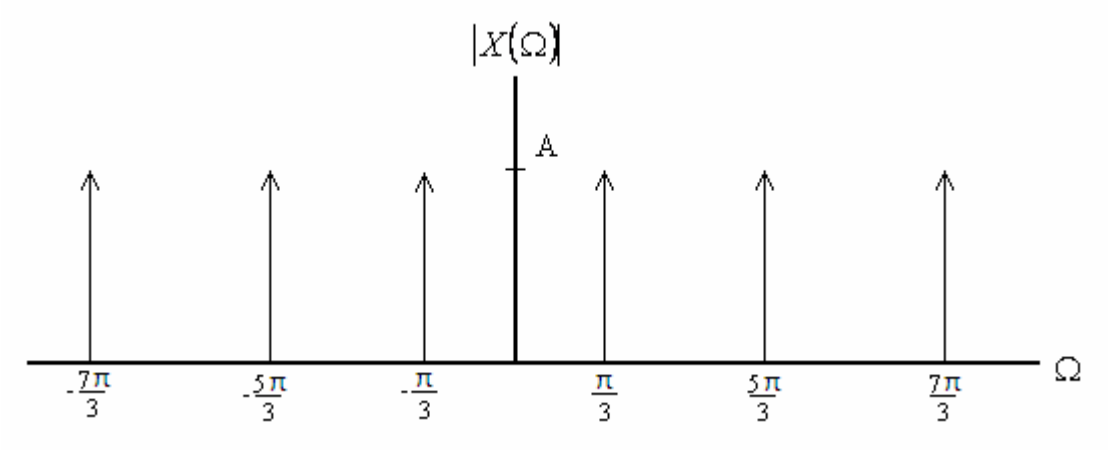
3.4 (1 pto por n° de muestras, 0.25 ptos por gráfico, 0.25 ptos por conclusión)

Frecuencia de muestreo: $\frac{1}{3.33 \cdot 10^{-3}} = 300$ Hz

Periodo de la señal: $\frac{2\pi}{100\pi} = 20$ ms

Por lo tanto, el número de muestras es:

$$n = 300 \cdot \frac{20}{1000} = 6 \text{ muestras}$$



$$A = \frac{\sqrt{13}\pi}{0.0033}$$

Se concluye que disminuyendo el periodo de muestreo se genera un mayor espaciado entre las muestras en el gráfico de amplitud del espectro de frecuencias.