Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 11

Fecha de entrega: 22 de mayo de 2022

---

1. Investigue:

   - ¿Que es la DTFT?

     La DTFT es la transformada de Fourier de tiempo discreto. Entrega las componentes de frecuencia de una señal discreta.

   - ¿Cual es su expresión matemática?

     $$\tilde{F}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i2\pi unT}$$

   - ¿Cual es su inversa?

     $$f[n] = T \int_0^{\frac{1}{T}} \tilde{F}(u) e^{i2\pi unT} du$$

   - ¿Para que tipo de funciones existe DTFT?

     La DTFT existe para señales discretas en el tiempo

   - ¿Como es el espectro de las señales que tienen DTFT?

     El espectro de las señales que tienen DTFT es periódico.

2. Encuentre la DTFT de la señal:

$$f[n] = \alpha^n \ u_n$$

Partimos escribiendo la definición de la DTFT:

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \ u_n \ e^{-i2\pi unT}$$

Sabemos que el escalón nos restringe la sumatoria:

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \ e^{-i2\pi unT}$$

Esto es lo mismo que

$$\bar{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha \ e^{-i2\pi uT})^n$$

Y asumiendo que $\alpha \ e^{-i2\pi uT}$ es menor a 1, podemos aplicar la fórmula de la sumatoria geométrica, por lo que nos queda:

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-i2\pi uT}}$$

3. Investigue:

- ¿Que es la DFFT?

  La DFFT es la transformada de Fourier de frecuencia discreta. Esta transofrmada entrega la frecuencia discreta de una señal periódica.

- ¿Cual es su expresión matemática?

  Para una señal de período T con $U = \frac{1}{T}$:

$$F[K] = U \int_0^{\frac{1}{U}} \tilde{f}(x) e^{-i2\pi kxU} dx$$

- ¿Cual es su inversa?

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{i2\pi xUk}$$

- ¿Para que tipo de funciones existe DFFT?

  Las funciones periódicas tienen DFFT

- ¿Como es el espectro de las señales que tienen DFFT?

  El espectro de las funciones que tienen DFFT, tal como lo indica el nombre es discreto.

4. Encuentre la DFFT de una señal periódica rectangular de período T, que vale 1 entre 0 t T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y vale 1 entre 3T/4 y T.

   Para realizar este ejercicio, analizamos que es un ren de pulsos de un rect de ancho 4. Al ser un rect tenemos la *intuición* de que en Fourier debería ser un sinc (o similar). Resolvemos aplicando la definición de DFFT:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-i2\pi k\frac{x}{T}} f(x)dx$$

   Dado que $f(x) = 1$ entre 0 y T/4, vale 0 entre T/4 y 3T/4 y 1 entre 3T/4 y T podemos dividir esto en 3 integrales:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/4} e^{-i2\pi k\frac{x}{T}}\cdot 1dx + \int_{T/4}^{3T/4} e^{-i2\pi k\frac{x}{T}}\cdot 0dx + \int_{3T/4}^{T} e^{-i2\pi k\frac{x}{T}}\cdot 1dx\right]$$

   Luego, resolviendo llegamos a:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{-i2\pi k}\left[e^{-i2\pi\frac{k}{4}} - 1 + e^{-i2\pi k} - e^{-i2\pi\frac{3k}{4}}\right]$$

   Resolviendo y reemplazando las exponenciales por su fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[\cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right) - i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) - 1 + \cos(2\pi k) - i\sin(2\pi k) - \cos\left(2\pi\frac{3k}{4}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)\right]$$

   Por simetría en el círculo unitario $\cos\left(2\pi\frac{k}{4}\right) = \cos\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)$

   Si k es un entero (válido en el mundo discreto): $\cos(2\pi k) = 1$ y $\sin(2\pi k) = 0$. Luego, considerando los dos puntos anteriores, la expresión de $\tilde{F}[k]$ se reduce a:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[-i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) + i\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)\right]$$

Dado k entero y usando simetrías tendremos que: $\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right) = -\sin\left(2\pi\frac{3k}{4}\right)$, por lo que:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{-i2\pi k}\left[-2i\sin\left(2\pi\frac{k}{4}\right)\right]$$

Simplificando:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Haciendo un cambio de variable (sugiero usar v=k/2), tendremos finalmente:

$$\boxed{\tilde{F}[k] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{k}{2}\right)}$$

5. Muestre la relación que hay entre la DFFT y la serie de Fourier

   Notamos que la fórmula de los coeficientes complejos es la DFFT.