Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 12

9 de Junio 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

Pregunta 1

En relación a la interpolación de primer orden responda las siguientes preguntas:

a)

Demuestre que las muestras obtenidas con período T convolucionadas con $h_{FOH}(t) = \wedge(t/T)$ permite obtener la interpolación:

La convolución para un intervalo pequeño $t \in (nT, (n+1)T)$ estará dada por:

$$f_{FOH}(t) = f[n] \wedge ((t - nT)/T) + f[n+1] \wedge ((t - (n+1)T)/T)$$

Uando la defínción de $\wedge(t)$:

$$f(t)_{FOH} = f[n](1 - (t - nT)/T) + f[n+1](1 - (t - (n+1)T)/T)$$

$$f(t)_{FOH} = \left(\frac{f[n+1] - f[n]}{T}\right) t + f[n] + n(f[n] - f[n+1])$$

Que corresponde a una recta.

b)

Calcule el espectro de frecuencia de la señal:

$$f_{FOH}(t) = (f(t)\text{Ш}(t/T)) * \wedge(t/T)$$
$$F_{FOH}(u) = (F(u) * \text{Ш}(Tu))sinc^2(Tu)$$

c)

Si ahora la señal interpolada se convoluciona con $h(t) = \sqcap(t/T)/T$ para suavizarla, se recuperaría una señal similar a la original, si es que esta solo contiene frecuencias bajas en relación a la frecuencia de Nyquist. Si asumimos aceptable que el espectro de la señal recuperada difiera hasta en un 10 % del espectro de la señal original, ¿cuál es la máxima frecuencia que podríamos recuperar de forma confiable tras el proceso?. Exprésela como una fracción de la frecuencia de Nyquist. Para aproximar la función sinc(x) cerca de x = 0 se recomienda utilizar el polinomio de Taylor de segundo orden.

Recordamos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Al convolucionar con un $\sqcap$ el espectro sería:

$$G_{FOH}(u) = (F(u) * \text{Ш}(Tu))sinc^3(Tu)$$

Para recuperar la mayoría de la señal:

$$sinc^3(Tu) = 0.9$$

Es decir:

$$1 - \frac{\pi^2(Tu)^2}{6} = \sqrt[3]{0.9}$$

Así tenemos $u \approx 0.145/T$, y además sabemos que $u_{Nyquist} = 0.5/T$, por lo que se recupera gran parte de la información.

Pregunta 2

Se define la transformada de Laplace elíptica como:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_{a,b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{a+b}{2} e^{-st} + \frac{a-b}{2} e^{-s^* t} \right] dt$$

Exprese el resultado en términos de $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ el resultado de $\Re\{f(t)\} \xrightarrow{\mathcal{L}_{a,b}}$ para:

a)

$f(t)$ cualquiera.

$$F_{a,b} = \frac{a+b}{2} F(s) + \frac{a-b}{2} F(s^*)$$

Podemos usar una función auxiliar en que:

$$g(t) = \Re\{f(t)\} = \frac{f(t) + f^*(t)}{2}$$

Luego podemos expresar la parte real de la transformada como:

$$G_{a,b} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{F(s) + F^*(s^*)}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{F(s^*) + F^*(s)}{2}$$

b)

$f(t)$ real y par, y en particular $a = 1$ y $b = 0$.

Si es real $F(s) = F^*(s^*)$ y es par $F(s) = F(-s)$

$$G_{a,b} = \frac{a+b}{2} \cdot F(s) + \frac{a-b}{2} \cdot F^*(s)$$

En particular:

$$G_{1,0} = \frac{F(s) + F^*(s)}{2} = Her\{F(s)\}$$

c)

$f(t)$ imaginaria y par, y en particular $a = 1$ y $b = 0$.

Si $f(t)$ es imaginaria, la parte real de su transformada será:

$$G_{1,0} = 0$$

Pregunta 3

Considere que tiene una señal $f(t) = (a, b, c, d)$ y su DFT $F(u) = (A, B, C, D)$ exprese la DFT de las siguientes señales en términos de A,B,C y D:

a)

$f_1 = (c, 0, 0, 0)$

Es claro que $(0, 0, c, 0) = (a, b, c, d)\delta[n-2]$. Entonces la DFT es $(A, B, C, D) * \frac{1}{4}(1, -1, 1, -1)$. Por lo tanto:

$$DFT\{(0, 0, c, 0)\} = \frac{1}{4}(A - B + C - D, -A + B - C + D, A - B + C - D, -A + B - C + D)$$

Por lo tanto al desfasarlo usamos $(-1)^n$:

$$DFT\{(c, 0, 0, 0)\} = \frac{1}{4}(A-B+C-D, -(-A+B-C+D), A-B+C-D, -(-A+B-C+D))$$

$$\frac{A - B + C - D}{4}(1, 1, 1, 1)$$

b)

$f_2 = (a, 0, c, 0)$

Similarmente partimo calculando $DFT\{(a, 0, 0, 0)\} = (A, B, C, D) * (1, 1, 1, 1)\frac{1}{4}$. Esto es:

$$DFT\{(a, 0, 0, 0)\} = \frac{A + B + C + D}{4}(1, 1, 1, 1)$$

Por superposición puedo sumar ambas $DFT\{(a, 0, 0, 0)\} + DTF\{(0, 0, c, 0)\}$ que es:

$$\frac{1}{2}(A + C, B + D, A + C, B + D)$$

c)

$f_3 = (b, 0, d, a)$

Partimos por:

$$(a, b, c, d) - (0, 0, c, 0)$$

O bien:

$$(A, B, C, D) - \frac{1}{4}(A - B + C - D, -A + B - C + D, A - B + C - D, -A + B - C + D)$$

$$\frac{1}{4}(3A + B - C + D, A + 3B + C - D, -A + B + 3C + D, A - B + C + 3D)$$

Usando el desplazamiento como $e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$

$$\frac{1}{4}(3A + B - C + D, -j(A + 3B + C - D), -(-A + B + 3C + D), j(A - B + C + 3D))$$

d)

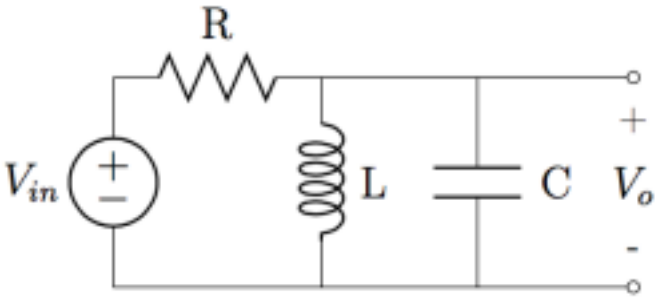
$f_4 = (0, d, 0, b)$

Acá lo relevante es notar que $f[-n] \rightarrow F^*(u)$ por lo tanto es cosa de calcular la transformada de $(b, 0, d, a) - (0, 0, 0, a)$ y conjugar:

$$\frac{1}{2}(A^* - C^*, B^* - D^*, C^* - A^*, D^* - B^*)$$

Pregunta 4

Se le presenta un circuito RLC:



a)

Obtenga la función de transferencia $H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$

Es fácil ver que la función de transferencia es:

$$H(s)\frac{Z_L||Z_C}{Z_L||Z_C + Z_R}$$

Con $Z_L = sL$, $Z_C = 1/(sC)$ y $Z_R = R$. Se puede calcular que $Z_L||Z_C$ es:

$$\frac{sL}{1 + s^2LC}$$

Por lo tanto:

$$H(s) = \frac{sL}{s^2RLC + sL + R}$$

b)

Determine los polos y ceros.

Hay un solo cero en $s_z = 0$ y hay dos polos en:

$$s_p = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}$$

c)

Dibuje el diagrama de polos y ceros con $R = 1000\Omega$, $L = 1H$ y $C = 2.5\mu F$.

Al reemplazar en los valores se llega a:

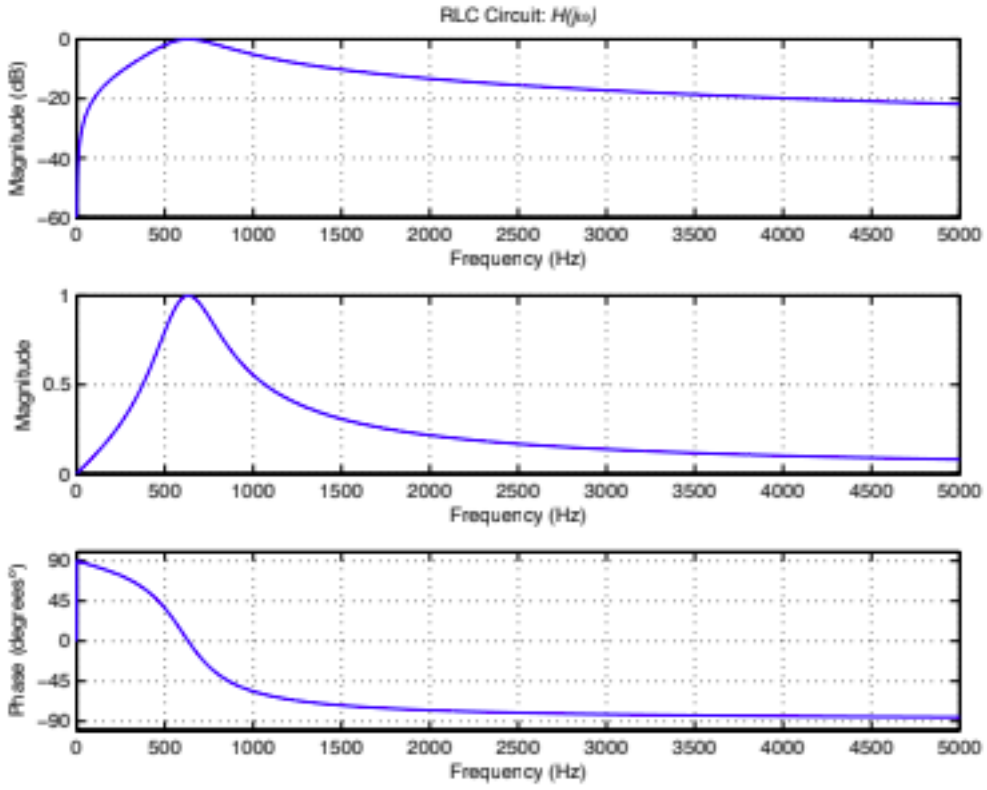
$$s_z = 0 \quad s_{p1} = -200 + 600i \quad s_{p1} = -200 - 600i$$

d)

Dibuje la respuesta de fase y magnitud.

Recordamos que la fase está dada por:

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\Im H(s)}{\Re H(s)}\right)$$



Pregunta 5

Tiene el sistema: $g'(t) = Ag(t) + f(t)$ En este caso $g(t) \in R^{n\times 1}$, $f(t) \in R^{n\times 1}$ y $A \in R^{n\times n}$. Encuentre la función de transferencia.

Dado que se le puede aplicar Laplace a cada elemento del vector:

$$sG(s) = AG(s) + F(s)$$

$$G(s)(sI - A) = F(s)$$

$$H(s) = (sI - A)^{-1}$$