Prueba 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y otros apuntes.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja.
- No se olvide de colocar su nombre en todas las hojas, ¡hágalo ahora!

---

1. [12 ptos] **Serie de Fourier.** Encuentre todos los coeficientes a_k y b_k de la expansión en series de Fourier de

$$f(x) = 1 + e^{ix}$$

Resultado: La función $f(x)$ tiene la forma de las bases de Fourier por lo que su expansión en series de Fourier es trivial. Dado que

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 x} = 1 + e^{ix}$$

se tiene $\omega_0 = 1$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$ y $C_k = 0$ para $k \neq 0, 1$. $C_0 = 1 \implies a_0 = 1$. Y

$$\begin{aligned} a_1 - ib_1 &= 2C_1 \\ a_1 + ib_1 &= 2C_{-1} \end{aligned}$$

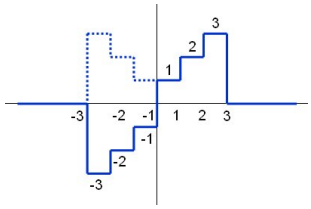
por lo que $a_1 = 1$, $b_1 = i$ y todo el resto 0.

2. [12 ptos] **Salida de un sistema.** Se tiene un sistema lineal e invariante cuya respuesta al impulso es $h(x) = \sqcap(x)$. Encuentre la salida $g(x)$ del sistema si la entrada es $f(x) = [3\sqcap(x/6) - \sqcap(x/4) - \sqcap(x/2)]\,\mathrm{sgn}(x)$.

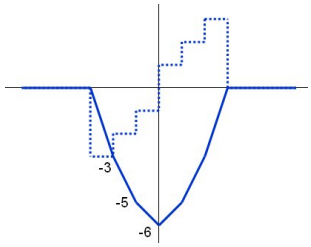
Resultado: Como el sistema es lineal e invariante, la salida será la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso

$$[3\sqcap(x/6) - \sqcap(x/4) - \sqcap(x/2)]\,\mathrm{sgn}(x) * \sqcap(x)$$

Esta convolución se resuelve trivialmente en forma gráfica. La entrada es (en línea punteada se muestra antes de multiplicar por sgn)



La convolución se muestra en el siguiente gráfico, que no es otra cosa que la integral de la entrada



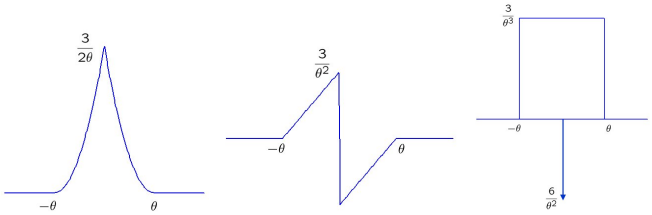
3. [4 ptos] **Segunda derivada del impulso.** Sea

$$g_\theta(x) = \frac{3(\theta - |x|)^2}{2\theta^3} \sqcap (\frac{x}{2\theta}).$$

Emplee $g_\theta(x)$ como función aproximante de $\delta(x)$ para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x)\, dx.$$

Resultado:



La integral pedida será

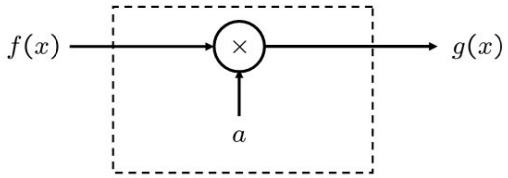
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x)\, dx &= \lim_{\theta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g''_\theta(x)\, dx \\ &= \lim_{\theta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left\{-\frac{3}{\theta^3}(\theta - |x|)\mathrm{sgn}(x) \sqcap (x/2\theta))\right\} dx\end{aligned}$$

Nótese que la derivada de $g_\theta(x)$ en $x = \pm\theta$ es 0, por lo que no hay impulsos en esas posiciones.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x)\, dx &= \lim_{\theta\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{3}{\theta^3} \sqcap (x/2\theta) - \frac{6}{\theta^2}\delta(x)\right\} dx \\ &= \lim_{\theta\to 0} \left\{\frac{6}{\theta^2} - \frac{6}{\theta^2}\right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

El impulso en $x = 0$ aparece de derivar la función $\mathrm{sgn}(x)$.

4. [4 ptos] **Linealidad e invariancia**. El sistema de la figura multiplica la entrada por a. Es decir, la salida es $g(x) = af(x)$.



Para las dos siguientes posibilidades de a, indique si el sistema es lineal o no, y si es invariante en x o no. Demuestre su respuesta.

(a) $a = x$

(b) $a = f(x)$ (la entrada)

Resultado:

(a) Si $f(x) \to g(x) = xf(x)$, entonces

$af(x) \to xaf(x)$	$= ag(x)$	cumple homogeneidad
$f_1(x) + f_2(x) \to x(f_1(x) + f_2(x))$	$= g_1(x) + g_2(x)$	cumple superposición
$f(x - \Delta) \to xf(x - \Delta)$	$\neq g(x - \Delta)$	no cumple invariancia

El sistema es lineal y variante.

(b) Si $f(x) \to g(x) = f^2(x)$, entonces

$af(x) \to a^2 f^2(x)$	$\neq ag(x)$	no cumple homogeneidad
$f(x - \Delta) \to f^2(x - \Delta)$	$= g(x - \Delta)$	cumple invariancia

El sistema es no lineal e invariante.

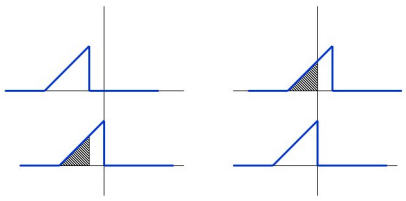
5. [4 ptos] **Autocorrelación y paridad.** Se define la autocorrelación para una función real como

$$f(x) \star f(x) = \frac{f(x) * f(-x)}{A}$$

con A el área total de $f(x)$. Es decir, es la auto-convolución sin invertir una de las funciones y normalizada por el área.

Encuentre la parte par $e(x)$ e impar $o(x)$ de $f(x) \star f(x)$.

Resultado:



Por inspección gráfica (ver el ejemplo de la figura) se sabe que la autocorrelación es par.

Analíticamente se puede calcular de la siguiente forma. Sea $g(x) = f(x) \star f(x)$,

$$\begin{aligned} 2e(x) &= g(x) + g(-x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(\xi - x)\, d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(\xi + x)\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta + x) f(\eta)\, d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(\xi + x)\, d\xi \\ &= 2g(x) \end{aligned}$$

En resumen $e(x) = f(x) \star f(x)$ y $o(x) = 0$.

6. [4 ptos] **Transformada de Shah**. Suponga que se quiere aproximar Shah agregando impulsos sucesivamente a cada lado, comenzando en el origen, es decir,

$$\text{Ш}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \delta(x - k).$$

Note que $\text{Ш}_n(x) \to \text{Ш}(x)$ cuando $n \to \infty$. Sea $F_n(u)$ la transformada de Fourier de $\text{Ш}_n(x)$. Para verificar si $F_n(u) \to \text{Ш}(u)$ cuando $n \to \infty$ vamos a ver qué sucede para un valor particular de u a medida que n crece. Para eso grafique el valor de $F_n(u)$, en función de n evaluado en

(a) $u = 1/2$

(b) $u = 1/4$

Opcional: Encuentre el gráfico para $F_n(u)$ evaluado en $u = 1/100$.

Resultado: En primer lugar debemos calcular la transformada de Fourier de $\text{Ш}_n(x)$ para lo cual se aplicará la propiedad del desplazamiento, es decir,

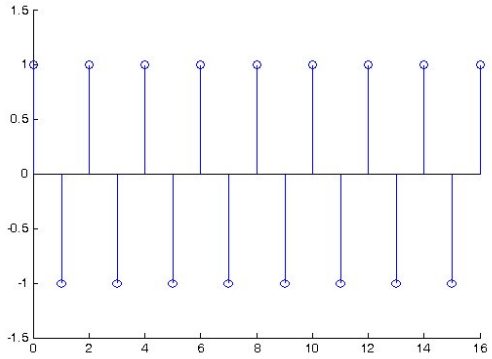
$$\begin{aligned} F_n(u) &= \mathcal{F}\{\sum_{k=-n}^{n} \delta(x - k)\} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \mathcal{F}\{\delta(x - k)\} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{-i2\pi k u} \end{aligned}$$

(a) Para $u = 1/2$

$$F_n(1/2) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-i\pi k}$$

Es decir,

$$
\begin{array}{lcl}
F_0(1/2) = & 1 & = 1 \\
F_1(1/2) = & -1+1-1 & = -1 \\
F_2(1/2) = & 1-1+1-1+1 & = 1 \\
F_3(1/2) = & -1+1-1+1-1+1-1 & = -1
\end{array}
$$

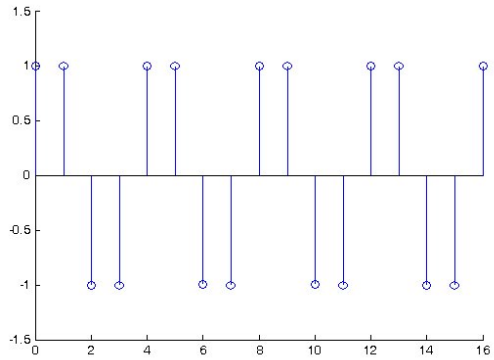


(b) Para $u = 1/4$

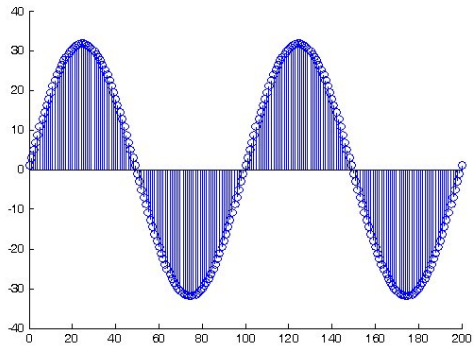
$$F_n(1/4) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-i\pi k/2}$$

Es decir,

$$
\begin{array}{lcl}
F_0(1/4) = & 1 & = 1 \\
F_1(1/4) = & i+1-i & = 1 \\
F_2(1/4) = & -1+i+1-i-1 & = -1 \\
F_3(1/4) = & -i-1+i+1-i-1+i & = -1
\end{array}
$$



Para $u = 1/100$,


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200