Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 3

24 de Marzo 2023
Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl
Crédito a Ayudantías 2016-2, 2022-2

Distribuciones

Son mapeos aplicados a funciones de Schwartz $\psi(x)$ que son funciones infinitamente derivables y que decaen rápidamente a 0.
Una distribución temperada se define como una distribución inducida por funciones, descrita de la forma:

$$< F, \psi >= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\psi(x)dx$$

Propiedades

- Derivada: $< T', \psi > =$ - $< T, \psi' >$
- Desplazamiento: $< \tau_a T, \psi > = < T(x-a), \psi >$
- Escalamiento: $< \delta_a T, \psi > = < T, \frac{1}{|a|}\psi >$
- Multiplicación: $< Tf, \psi > = < T, f\psi >$

El Impulso

- Es una distribución de la forma: $< \delta, \psi >= \psi(0)$
- Desplazada se ve como $< \delta_a, \psi >= \psi(a)$
- Cumple con la propiedad del muestreo: $f(x)\delta = f(0)\delta$

Convolución

Se define la convolución como una operación entre dos funciones que nos entrega como resultado una tercera función. Su expresión matemática es:

$$h(t) = \{g * f\}(t) = \int_{\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx$$

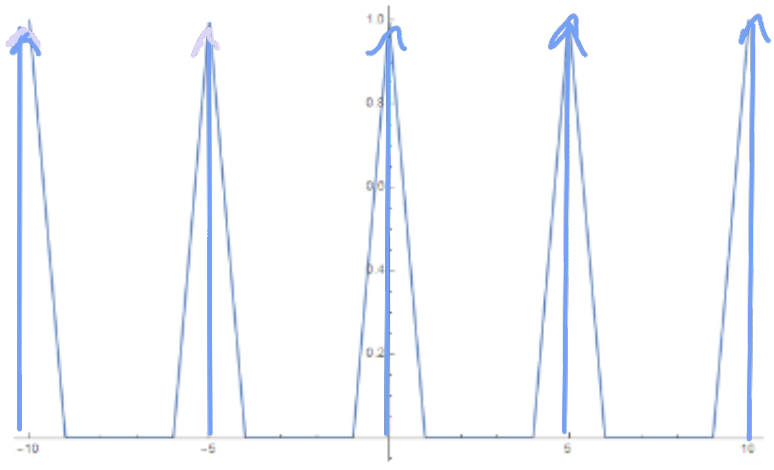
Lo que gráficamente corresponde a el área de la función multiplicación entre una de las funciones estática y la otra desplazada para todos los posibles desplazamientos.

La convolución cumple con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $h(t) = \{g * f\}(t) = \{f * g\}(t)$
- Asociatividad: $h(t) = \{r * \{g * f\}\}(t) = \{g * \{r * f\}\}(t)$
- Distributividad: $h(t) = \{g * (f + r)\}(t) = \{g * f\} + \{g * r\}(t)$
- Multiplicación por escalar: $h(t) = \{a \cdot g * f\}(t) = \{g * a \cdot f\}(t) = a \cdot \{g * f\}(t)$
- Derivación: $h(t) = \{g * f\}(t) \rightarrow h'(t) = h(t) = \{g' * f\}(t) = h(t) = \{g * f'\}(t)$
- Convoluciones con el impulso: cumple con la propiedad del cedazo, y además se harán evidentes algunos desplazamientos.
  - $h(t) = \delta(x) * f(x) = f(x)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x) * f(x - a) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x - b) = f(x - a - b)$

Ejercicios

1. Determine la ecuación del siguiente gráfico:



(1) $\coprod_5 \rightarrow \frac{1}{5}\coprod\left(\frac{x}{5}\right) * \Lambda(x)$

$\sum \delta(5x - n) = \sum \delta\left(5\left(x - \frac{n}{5}\right)\right)$

2. Calcule las siguientes convoluciones:

   a) $\{\sqcap' * u\}(x)$ $= \Pi(x)$

   b) $\sqcap * \{\delta + \sqcap\}(x)$ $= \Pi(x) + \Lambda(x)$

   c) $\sqcap * \{\delta_b + \sqcap\}(x)$ $= \Pi(x-b) + \Lambda(x)$

   d) $\sqcap * \{\sqcap + \sqcap\}(x)$ $= \Lambda(x) + \Lambda(x)$

3. Demuestre que si $g(x) = f(x) * h(x)$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

4. Sea la transformada de Abel de una función $f(r)$:

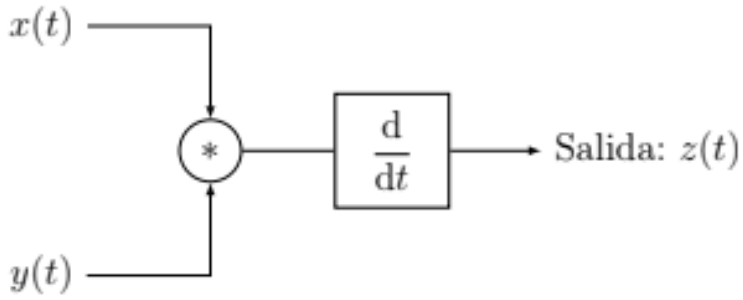
$$F(y) = 2\int_{y}^{\infty} \frac{f(r)r \ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

   Determine si la transformada de Abel es lineal.

5. Si $h(x) = \{f(x) * g(x)\}$ Demuestre:

$$h(x)' = \{f(x)' * g(x)\} = \{f(x) * g(x)'\}$$

6. Siendo $x(t) = \sqcap(t)$ y $y(t) = \wedge(t)$ cuanto vale la salida del sistema:



7. Se tiene el sistema:

$$g(x) = \int_{0}^{x} f(\eta)d\eta$$

   Encuentre la salida cuando la entrada es $\delta(\eta - \xi)$.

$$g(x) = \int_{0}^{x} \delta(\eta - \xi)d\eta$$

4. Demuestre que si $g(x) = f(x) * h(x)$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

Don't go there 'cause u never return, y know u think of me when u think of her.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi_1) \cdot h(\xi_1) d\xi_1 \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1) d\xi_1 \cdot \int f(\gamma) d\gamma$$

s.a. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) * g(x)| dx < \infty$

(4) $F(y) = 2 \int_{y}^{\infty} \frac{f(r) r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr$

Es lineal cumple homogencidad y superposiy.

(5) $\{ f' * g \}(x)$

$= \{ f * \delta' * g \}(x) \longrightarrow f * \delta' = f' * \delta = f'(x)$

$= \{ f * g \}(x)$