Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 9

24 de Octubre 2022

Considere la secuencia $\tilde{f}[n] = (a \quad b \quad c \quad d)$ donde los coeficientes $\in \mathbb{C}$

1. Para $a = 1$, $b = 3$, $c = -2$ y $d = 0$ grafique la secuencia entre $n = -8$ y $n = 8$.
   Para resolver esto, sabemos que todas las funciones escritas de la forma $\tilde{f}[n]$ (con el cachirulo) son **periódicas**. Esto significa que:

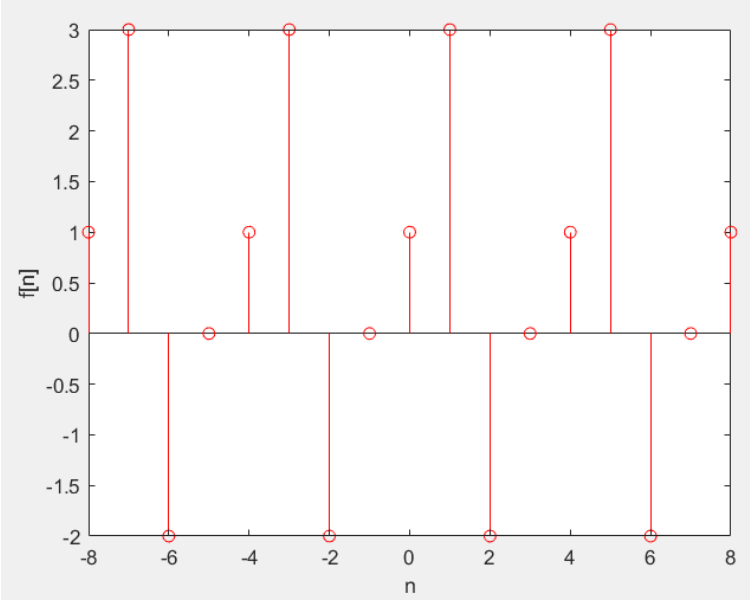
$$f[-8] = a \qquad f[-7] = b \qquad f[-6] = c \qquad f[-5] = d$$

$$f[-4] = a \qquad f[-3] = b \qquad f[-2] = c \qquad f[-1] = d$$

$$f[0] = a$$

$$f[1] = b \qquad f[2] = c \qquad f[3] = d \qquad f[4] = a$$
$$f[5] = b \qquad f[6] = c \qquad f[7] = d \qquad f[8] = a$$

   Con esto, y sustituyendo los valores $a = 1$, $b = 3$, $c = -2$ y $d = 0$ se obtiene:



2. Encuentre la DFT de la secuencia $\tilde{f}[n] = (a \quad b \quad c \quad d)$.
Para encontrar la DFT de la secuencia tomamos la fórmula:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}[n]e^{-i2\pi\frac{kn}{N}}$$

En este caso la secuencia es de período 4, por lo que $N = 4$ por lo que:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} \tilde{f}[n]e^{-i2\pi\frac{kn}{4}}$$

Expandiendo la suma y reemplazando los valores de $f[n]$ se obtiene:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{4}ae^{-i2\pi\frac{k\cdot 0}{4}} + \frac{1}{4}be^{-i2\pi\frac{k\cdot 1}{4}} + \frac{1}{4}ce^{-i2\pi\frac{k\cdot 2}{4}} + \frac{1}{4}de^{-i2\pi\frac{k\cdot 3}{4}}$$

Observemos, por identidad de Euler:

$a)$ $e^{0k} = 1$
$b)$ $e^{-i2\pi\frac{k\cdot 1}{4}} = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$
$c)$ $e^{-i2\pi\frac{k\cdot 2}{4}} = \cos\left(k\pi\right) - i\sin\left(k\pi\right)$
$d)$ $e^{-i2\pi\frac{k\cdot 3}{4}} = \cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right)$

Considerando las simetrías en el círculo unitario y que k es entero:

$a)$ $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right)$
$b)$ $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right)$
$c)$ $\sin\left(k\pi\right) = 0$
$d)$ $\cos\left(k\pi\right) = \pm 1$

Entonces:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{4}\left[a \pm c + (b+d)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i(b-d)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

3. Determine condiciones para a, b, c, d para la que DFT de la secuencia $\tilde{f}[n] = (a \quad b \quad c \quad d)$ sea puramente imaginaria.
Por simetrias de la transformada de Fourier, tenemos que para que $\tilde{F}[k]$ sea imaginaria pura, es necesario que: $\tilde{f}[n]$ sea real impar o que $\tilde{f}[n]$ sea antihermitiana (parte real impar y parte imaginaria par): $\bar{f[a]} = -f[-a]$ donde la barra significa conjugado.

Caso 1: $\tilde{f}[n]$ real impar

- $a = 0$ o $a \in \mathbb{I}$ necesariamente, ya que va a quedar multiplicada por e^0, lo que hará que se sume a la secuencia.
- Por periodicidad:
$$f[1] = b \qquad f[-1] = d$$
Tomando simetria hermitiana, es necesario que:
$$\bar{b} = -d$$
- Luego:
$$f[2] = c \qquad f[-2] = c$$
Tomando simetria hermitiana, es necesario que:
$$\bar{c} = -c$$
Notemos que esto solo se logra si $c = 0$ o $c \in \mathbb{I}$
- Finalmente:
$$f[3] = d \qquad f[-3] = b$$
Por simetría se requiere:
$$\bar{d} = -b$$

Esto también se puede notar observando la DFT:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{4}\left[a \pm c + (b+d)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i(b-d)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

Notamos que a y c multiplican números reales, por lo que la unica opción para que la parte real desaparezca es que estos sean 0 o que sean imaginarios puros. Por otro lado, queremos que $b+d$ sea imaginario puro y que $b-d$ sea imaginario puro, lo que se logra con $d = -\bar{b}$. Así $b+d$ es puramente imaginario y $b-d$ es puramente real.