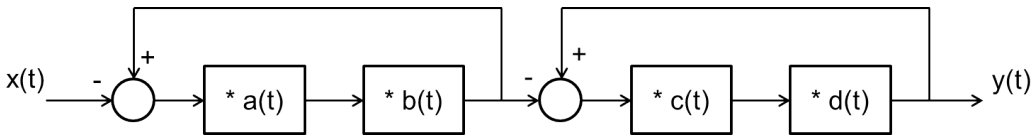
Prueba 2 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Se tiene el sistema con realimentación de la figura. Las respuestas al impulso (y sus transformadas) de cada uno de los subsistemas son $a(t) \longrightarrow A(u)$, $b(t) \longrightarrow B(u)$, $c(t) \longrightarrow C(u)$ y $d(t) \longrightarrow D(u)$. El símbolo circular indica la resta de señales. Encuentre la función de transferencia del sistema de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$.



Resultado: Para hacerlo más fácil encontraremos la función de transferencia de la primera mitad (salida $y_1(t)$), y luego replicaremos ya que ambas mitades son iguales. La entrada a $A(u)$ es $Y_1(u) - X(u)$ y la salida será $A(u)\,(Y_1(u) - X(u))$ que a su vez es la entrada a $B(u)$, y su salida será

$$Y_1(u) = A(u)B(u)\,(Y_1(u) - X(u))$$

De esta ecuación se puede despejar $Y_1(u)$

$$Y_1(u) = A(u)B(u)Y_1(u) - A(u)B(u)X(u)$$

$$(1 - A(u)B(u))Y_1(u) = -A(u)B(u)X(u)$$

$$Y_1(u) = \frac{A(u)B(u)}{A(u)B(u) - 1}X(u)$$

La función de transferencia total será la multiplicación de la función de transferencia de la primera mitad con la segunda mitad

$$Y(u) = \frac{A(u)B(u)}{A(u)B(u) - 1}\,\frac{C(u)D(u)}{C(u)D(u) - 1}X(u)$$

2. [6 ptos] Sea $F(u)$ la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{i2\pi x} \wedge (x)$$

Encuentre

$$\lim_{u\to\infty} F(u) \quad \text{y} \quad \lim_{u\to-\infty} F(u)$$

Resultado: Es más fácil si escribimos

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{i2\pi x}\right) \wedge (x)$$

ya que $\delta(x) \wedge (x) = \delta(x)$. Su transformada de Fourier será

$$F(u) = \sqcap(-u) * \operatorname{sinc}^2 u = \int_u^\infty \operatorname{sinc}^2(\eta)\, d\eta$$

de donde claramente

$$\lim_{u\to\infty} F(u) = 0$$

Y, dado que la integral de $\operatorname{sinc}^2 u$ es uno,

$$\lim_{u\to-\infty} F(u) = 1$$

3. [6 ptos] Sea $f(x) \longrightarrow F(u)$.

   (a) [4 ptos] Encuentre la transformada de Fourier $G(u)$, en función de $F(u)$, de $g(x) = f(x) + f^*(x)$ donde $f^*(x)$ es el complejo conjugado de $f(x)$.

   (b) [2 ptos] Si $f(x)$ es par, encuentre la paridad de la parte real y de la parte imaginaria de $G(u)$.

Resultado:

(a) Si $f(x) \longrightarrow F(u)$ entonces $f^*(x) \longrightarrow F^*(-u)$, por lo que

$$f(x) + f^*(x) \longrightarrow F(u) + F^*(-u)$$

Si no se acuerdan de $f^*(x) \longrightarrow F^*(-u)$, es fácil deducirla de la definición

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ux}\, du\right\}^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^*(u)e^{-i2\pi ux}\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-u')e^{i2\pi u'x}\, du' \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{F^*(-u)\} \end{aligned}$$

(b) Sea $F(u) = F_R(u) + iF_I(u)$, donde $F_R(u) \in \mathbb{R}$ es la parte real y $F_I(u) \in \mathbb{R}$ es la parte imaginaria. Entonces

$$\begin{aligned} G(u) &= F(u) + F^*(-u) \\ &= F_R(u) + iF_I(u) + F_R(-u) - iF_I(-u) \end{aligned}$$

Pero $f(x)$ es par por lo que $F(u)$ también lo es. Es decir $F_R(u) = F_R(-u)$ y $F_I(u) = F_I(-u)$, es decir

$$\begin{aligned} G(u) &= F_R(u) + iF_I(u) + F_R(-u) - iF_I(-u) \\ &= 2F_R(u) \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que la parte real de $G(u)$ es par y la parte imaginaria es cero.

4. [6 ptos] Imagine que alguien se equivoca y define la transformada de Fourier de $f(x)$ como

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi u|x|}\,dx$$

Llamésmola, la transformada de Reiruof.

(a) [3 ptos] Si la transformada de Fourier de $f(x)$ es $F(u)$, encuentre la transformada de Reiruof de $f(x)$ en función de $F(u)$.

(b) [3 ptos] Calcule la transformada de Reiruof de $f(x) = \sqcap(x)$. Nótese que esta pregunta se puede responder independientemente del resultado de (a).

Resultado:

(a) Conviene separar las partes derechas e izquierdas de $f(x)$. Sea

$$p(x) = f(x)\sqcap(x) \quad q(x) = f(x)\sqcap(-x) \quad \text{con} \quad f(x) = p(x) + q(x)$$

Sea

$$p(x) \longrightarrow P(u) \;\text{ y }\; q(x) \longrightarrow Q(u)$$

Entonces

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi u|x|}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-i2\pi u|x|}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{-i2\pi u|x|}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-i2\pi ux}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{i2\pi ux}\,dx \\ &= P(u) + \mathcal{F}^{-1}\{q(x)\} \\ &= P(u) + Q(-u) \end{aligned}$$

Ahora solo basta saber cómo expresar $P(u)$ y $Q(u)$ en función de $F(u)$.

$$\begin{aligned} P(u) &= \mathcal{F}\{f(x)\sqcap(x)\} \\ &= F(u) * \mathcal{F}\{\sqcap(x)\} \\ &= F(u) * \{\frac{1}{2}\delta(u) + \frac{1}{i2\pi u}\} \\ &= \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{i2\pi u} * F(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(u) &= \mathcal{F}\{f(x)\sqcap(-x)\} \\ &= F(u) * \mathcal{F}\{\sqcap(-x)\} \\ &= F(u) * \{\frac{1}{2}\delta(u) - \frac{1}{i2\pi u}\} \\ &= \frac{1}{2}F(u) - \frac{1}{i2\pi u} * F(u) \end{aligned}$$

Con lo que

$$G(u) = P(u) + Q(-u) = \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{i2\pi u} * F(u) + \frac{1}{2}F(-u) + \frac{1}{i2\pi u} * F(-u)$$

Que también se puede escribir como

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{2}\left\{F(u) + F(-u)\right\} + \frac{1}{2}\left\{F(u) + F(-u)\right\} * \frac{1}{i\pi u} \\ &= E(u) + E(u) * \frac{1}{i\pi u} \end{aligned}$$

Donde $E(u)$ es la parte par de $F(u)$.

(b) Para evaluar directamente la integral podemos separar las partes derecha e izquierda de $f(x)$, es decir

$$p(x) = \sqcap\left(\frac{x - 1/4}{1/2}\right) \quad \text{y} \quad q(x) = \sqcap\left(\frac{x + 1/4}{1/2}\right)$$

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-i2\pi ux}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x)e^{i2\pi ux}\,dx \\ &= \int_{0}^{1/2} e^{-i2\pi ux}\,dx + \int_{-1/2}^{0} e^{i2\pi ux}\,dx \\ &= \int_{0}^{1/2} e^{-i2\pi ux}\,dx - \int_{1/2}^{0} e^{-i2\pi ux}\,dx \\ &= \int_{0}^{1/2} e^{-i2\pi ux}\,dx + \int_{0}^{1/2} e^{-i2\pi ux}\,dx \\ &= 2\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x - 1/4}{1/2}\right)\right\} \\ &= e^{-i\pi u/2}\,\mathrm{sinc}\,\frac{u}{2} \end{aligned}$$