Ayudantía 7

Señales Discretas, Sistemas Discretos y Convolución Lineal

Señales y Sistemas

14 de octubre de 2022

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Resumen: señales discretas

- Una señal discreta es una señal que se evalúa en algunos valores específicos del domonio.
- Es posible pensar que una señal discreta siempre proviene de una señal continua que es muestreada con un período de muestreo T. De esta forma se tendrá que:

$$f[n] = f(nT)$$

Donde $f[n]$ es la versión discreta de la señal continua $f(nT)$ que fue muestreada con un período T.

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Ejercicio 1: señales discretas

La señal $f(t) = \cos(6\pi t)$ es muestreada a 5 veces su frecuencia de Nyquist. Escriba la señal discreta que representa esta señal muestreada.

Ejercicio 1: señales discretas

La señal $f(t) = \cos(6\pi t)$ es muestreada a 5 veces su frecuencia de Nyquist. Escriba la señal discreta que representa esta señal muestreada.

- Para comenzar, sabemos que:

$$f[n] = f(nT)$$

Por lo que para encontrar $f[n]$ debemos encontrar T

Ejercicio 1: señales discretas

La señal $f(t) = \cos(6\pi t)$ es muestreada a 5 veces su frecuencia de Nyquist. Escriba la señal discreta que representa esta señal muestreada.

- Para comenzar, sabemos que:

$$f[n] = f(nT)$$

  Por lo que para encontrar $f[n]$ debemos encontrar T

- Sabemos que la frecuencia de muestreo $\frac{1}{T}$ es 5 veces la frecuencia de Nyquist. Por lo que debemos buscar la frecuencia de Nyquist.

Ejercicio 1: señales discretas

La señal $f(t) = \cos(6\pi t)$ es muestreada a 5 veces su frecuencia de Nyquist. Escriba la señal discreta que representa esta señal muestreada.

- Para comenzar, sabemos que:

$$f[n] = f(nT)$$

  Por lo que para encontrar $f[n]$ debemos encontrar T
- Sabemos que la frecuencia de muestreo $\frac{1}{T}$ es 5 veces la frecuencia de Nyquist. Por lo que debemos buscar la frecuencia de Nyquist.
- La frecuencia máxima de la señal continua es $3Hz$, entonces, la tasa de Nyquist es $U_N = 6Hz$. Luego, la frecuencia de muestreo es $U_s = 30Hz$

Ejercicio 1: señales discretas

La señal $f(t) = \cos(6\pi t)$ es muestreada a 5 veces su frecuencia de Nyquist. Escriba la señal discreta que representa esta señal muestreada.

- Para comenzar, sabemos que:

$$f[n] = f(nT)$$

  Por lo que para encontrar $f[n]$ debemos encontrar T
- Sabemos que la frecuencia de muestreo $\frac{1}{T}$ es 5 veces la frecuencia de Nyquist. Por lo que debemos buscar la frecuencia de Nyquist.
- La frecuencia máxima de la señal continua es $3Hz$, entonces, la tasa de Nyquist es $U_N = 6Hz$. Luego, la frecuencia de muestreo es $U_s = 30Hz$
- Por lo tanto, el período de muestreo es $T = \frac{1}{30}s$. Entonces, la señal discreta es:

$$f[n] = f\left(\frac{n}{30}\right)$$

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Resumen: ecuaciones en diferencias

- Las ecuaciones de diferencias son ecuaciones en las que se busca una función discreta a partir de una combinación de versiones ponderadas y desfasadas de esta.

Resumen: ecuaciones en diferencias

- Las ecuaciones de diferencias son ecuaciones en las que se busca una función discreta a partir de una combinación de versiones ponderadas y desfasadas de esta.
- En general, una ecuación de diferencias de grado k se puede escribir de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Resumen: ecuaciones en diferencias

- Las ecuaciones de diferencias son ecuaciones en las que se busca una función discreta a partir de una combinación de versiones ponderadas y desfasadas de esta.
- En general, una ecuación de diferencias de grado k se puede escribir de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Considerando a_k y b_k parámetros conocidos para todo k, constantes o variables segun n, si X_k es conocido para todo k, tendemos una ecuación de diferencias cuya incógnita es $Y[n]$. Por ejemplo:

$$\sin[n]y[n] + e^n y[n-1] + 4y[n-2] = \cos[n]$$

- Es una ecuación de diferencias de grado 2, con parámetros $a_0 = \sin[n]$, $a_1 = e^n$ y $a_2 = 4$ y forzamiento $\cos[n]$.

Resumen: ecuaciones en diferencias lineales

- Son ecuaciones de diferencias cuyos coeficientes no dependen de n, es decir, en la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Para que sea lineal los coeficientes a_k y b_k deben ser independientes de n.

Resumen: ecuaciones en diferencias lineales

- Son ecuaciones de diferencias cuyos coeficientes no dependen de n, es decir, en la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

  Para que sea lineal los coeficientes a_k y b_k deben ser independientes de n.

- Para el análisis de señales es fundamental manejar este concepto y algunos métodos de resolución, ya que los sistemas discretos están descritos por ecuaciones de diferencias, podríamos decir que en el mundo continuo las ecuaciones diferenciales son análogas a las ecuaciones de diferencias del mundo discreto.

Resumen: solución a ecuaciones en diferencias lineales

- Para describir el método, utilizaremos un análisis muy similar al de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que contienen diferentes órdenes de derivación. Observemos que no es trivial realizar esta analogía, puesto que los retardos en el mundo discreto son análogos a la derivación en el mundo continuo (más adelante esta relación se hará más natural, cuando comparen propiedades de la transformada z con las de la transformada de Laplace)
- A continuación se presenta un paso a paso con una ecuación de tercer grado como ejemplo, el metodo se puede extender a todos los grados.
- Para resolver cualquier ecuación de diferencias es importante tener en cuenta que, al igual que en las ecuaciones diferenciales, la solución corresponde a la suma de la solución homogenea con la solución particular.

Resumen: solución a ecuaciones en diferencias lineales

Solución homogénea:

- Como bien sabemos, la solución homogénea corresponde a la respuesta a entrada cero, es decir, en el ejemplo dado, corresponde a la solución de una ecuación de la forma:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = 0$$

Resumen: solución a ecuaciones en diferencias lineales

Solución homogénea:

- Como bien sabemos, la solución homogénea corresponde a la respuesta a entrada cero, es decir, en el ejemplo dado, corresponde a la solución de una ecuación de la forma:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = 0$$

- Para encontrar la función $y[n]$ se propone plantear un polinomio característico que mantiene los coeficientes e introduce una variable que sustituye la función, el exponente de la variable corresponde al desfase de cada componente. En el ejemplo anterior, si ocupamos "xçomo variable auxiliar el polinomio característico es:

$$a_0 x^0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} = 0$$

Resumen: solución a ecuaciones en diferencias lineales

Solución homogénea:

- Continuamos la resolución de la ecuación resolviendo el polinomio característico. Dado que este es de grado 3, obtendremos 3 raíces: x_1, x_2, x_3.

Resumen: solución a ecuaciones en diferencias lineales

Solución homogénea:

- Continuamos la resolución de la ecuación resolviendo el polinomio característico. Dado que este es de grado 3, obtendremos 3 raíces: x_1, x_2, x_3.
- Entonces, la solución de la ecuación de diferencias $a_0y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + a_3y[n-3] = 0$ estará dada por:

$$y[n] = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \alpha_3 x_3^n$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son constantes dependientes de las condiciones iniciales del sistema.

Resumen: solución a ecuaciones en diferencias lineales

Solución particular:

- Muestra la respuesta de un sistema a una entrada no nula x[n], trabajando el ejemplo de la ecuación de diferencias lineal de grado 3 es:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + a_3 y[n-3] = x[n]$$

- Tal como en las ecuaciones diferenciales, se encuentran según el método del forzamiento, es decir, probar con funciones que puedan satisfacer la ecuación de diferencias, y si no se encuentra el número suficiente de soluciones linealmente independientes, estas se multiplican por potencias de n.
- **Anexos, referencias y recomendaciones**
  - Los ejemplos desarrollados se pueden encontrar descritos con un método diferente en el libro "Señales y sistemas continuos y discretos" S.Soliman.
  - No se queden con las dudas! Pregunten todo lo que necesiten:)
  - Para raíces complejas conjugadas se utiliza $x^n = |x|^n[\cos[n\theta] + i\sin[n\theta]]$ donde $\theta = \arctan(\frac{Im\{x\}}{Re\{x\}})$

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

Encuentre la solución a la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$$

Con condiciones iniciales $y[0] = 1$, $y[1] = -2$.

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

Encuentre la solución a la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$$

Con condiciones iniciales $y[0] = 1$, $y[1] = -2$.

- Comenzamos planteando el polinomio característico asociado:

$$1 - \frac{3}{4}x^{-1} + \frac{1}{8}x^{-2} = 0$$

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

Encuentre la solución a la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$$

Con condiciones iniciales $y[0] = 1$, $y[1] = -2$.

- Comenzamos planteando el polinomio característico asociado:

$$1 - \frac{3}{4}x^{-1} + \frac{1}{8}x^{-2} = 0$$

- Multiplicando toda la ecuación por x^2:

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$$

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

- Utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtenemos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$ la solución de la ecuación es:

$$y[n] = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

- Utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ obtenemos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$ la solución de la ecuación es:

$$y[n] = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- Para encontrar los valores de α_1 y α_2 evaluamos a conveniencia en n $= 0$ y reemplazamos los valores $y[0] = 1$, $y[-1] = -2$

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

- Utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ obtenemos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$ la solución de la ecuación es:

$$y[n] = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- Para encontrar los valores de α_1 y α_2 evaluamos a conveniencia en n $= 0$ y reemplazamos los valores $y[0] = 1$, $y[-1] = -2$
- Sustituyendo n $= 0$:

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

- Utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ obtenemos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$ la solución de la ecuación es:

$$y[n] = \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- Para encontrar los valores de α_1 y α_2 evaluamos a conveniencia en n $= 0$ y reemplazamos los valores $y[0] = 1$, $y[-1] = -2$
- Sustituyendo n $= 0$:

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

- Sustituyendo n $=$ -1:

$$-2 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias

- Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 = 3 \text{ y } \alpha_2 = -2$$

- Finalmente, la solución al problema planteado es:

$$y[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias

Encuentre la solución a la ecuación en diferencias $y[n] = y[n-1]$ en función de las condiciones iniciales.

Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias

Encuentre la solución a la ecuación en diferencias $y[n] = y[n-1]$ en función de las condiciones iniciales.

- Obtenemos el polinomio característico:

$$6 - 6m^{-1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6m - 6}{m} = 0$$

Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias

Encuentre la solución a la ecuación en diferencias $y[n] = y[n-1]$ en función de las condiciones iniciales.

- Obtenemos el polinomio característico:

$$6 - 6m^{-1} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6m - 6}{m} = 0$$

- La única solución es $m = 1$. Luego, la solución homogénea a la ecuación en diferencias es:

$$y[n] = C \cdot (1)^n$$

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Resumen: convolución lineal discreta

- La convolución lineal es la forma discreta de la convolución continua que conocemos. Esta se puede expresar de la forma:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

- Para su resolución en general se puede usar:
  - Sumas infinitas conocidas
  - Acotación de la sumatoria si las señales a convolucionar son de soporte compacto.
- Para señales **periódicas** se define la **convolución cíclica**, que es similar a la convolución lineal pero en un período (investigar en el libro).
- La convolución lineal de una secuencia de largo N con una de largo M queda de largo M+N-1.

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Ejercicio 1: convolución lineal

Calcule la convolución lineal:

$$(\underline{2}, 0, 1) * (3, \underline{2}, 0, 1)$$

Ejercicio 1: convolución lineal

Calcule la convolución lineal:

$$(\underline{2}, 0, 1) * (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- Comenzamos poniéndole nombre a las funciones:

$$f[n] = (\underline{2}, 0, 1) \qquad g[n] = (3, \underline{2}, 0, 1)$$

Ejercicio 1: convolución lineal

Calcule la convolución lineal:

$$(\underline{2}, 0, 1) * (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- Comenzamos poniéndole nombre a las funciones:

$$f[n] = (\underline{2}, 0, 1) \qquad g[n] = (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- A continuación, se escribe la función en cada posición. Para esto **se considera que la barra inferior indica el cero, si la barra no se explicita, se considera que el cero está en la primera posición de la función** Además, si no se indica explícitamente que la función es periódica (poniendo un cachirulo) se asume que la secuencia vale cero fuera de los valores indicados. De esta forma:

Ejercicio 1: convolución lineal

Calcule la convolución lineal:

$$(\underline{2}, 0, 1) * (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- Comenzamos poniéndole nombre a las funciones:

$$f[n] = (\underline{2}, 0, 1) \qquad g[n] = (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- A continuación, se escribe la función en cada posición. Para esto **se considera que la barra inferior indica el cero, si la barra no se explicita, se considera que el cero está en la primera posición de la función** Además, si no se indica explícitamente que la función es periódica (poniendo un cachirulo) se asume que la secuencia vale cero fuera de los valores indicados. De esta forma:

$$f[0] = 2 \qquad f[1] = 0 \qquad f[2] = 1$$

Ejercicio 1: convolución lineal

Calcule la convolución lineal:

$$(\underline{2}, 0, 1) * (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- Comenzamos poniéndole nombre a las funciones:

$$f[n] = (\underline{2}, 0, 1) \qquad g[n] = (3, \underline{2}, 0, 1)$$

- A continuación, se escribe la función en cada posición. Para esto **se considera que la barra inferior indica el cero, si la barra no se explicita, se considera que el cero está en la primera posición de la función** Además, si no se indica explícitamente que la función es periódica (poniendo un cachirulo) se asume que la secuencia vale cero fuera de los valores indicados. De esta forma:

$$f[0] = 2 \qquad f[1] = 0 \qquad f[2] = 1$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- A continuación, planteamos la sumatoria:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- A continuación, planteamos la sumatoria:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

- Sabemos que $f[k]$ vale 0 para todos los valores de k que no están en $[0, 3]$. De esta manera la sumatoria queda:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=0}^{3} f[k]g[n-k]$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- A continuación, planteamos la sumatoria:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

- Sabemos que $f[k]$ vale 0 para todos los valores de k que no están en $[0, 3]$. De esta manera la sumatoria queda:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=0}^{3} f[k]g[n-k]$$

- Podemos expandir la suma tal que:

$$\{f * g\}[n] = f[0]g[n] + f[1]g[n-1] + f[2]g[n-2]$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- Reemplazando los valores de f:

$$\{f * g\}[n] = 2 \cdot g[n] + 0 \cdot g[n-1] + 1 \cdot g[n-2]$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- Reemplazando los valores de f:

$$\{f * g\}[n] = 2 \cdot g[n] + 0 \cdot g[n-1] + 1 \cdot g[n-2]$$

- Ahora reemplazamos la secuencia y desplazamos el cero:

$$\{f * g\}[n] = 2 \cdot (3, \underline{2}, 0, 1) + 1 \cdot (\underline{0}, 3, 2, 0, 1)$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- Reemplazando los valores de f:

$$\{f * g\}[n] = 2 \cdot g[n] + 0 \cdot g[n-1] + 1 \cdot g[n-2]$$

- Ahora reemplazamos la secuencia y desplazamos el cero:

$$\{f * g\}[n] = 2 \cdot (3, \underline{2}, 0, 1) + 1 \cdot (\underline{0}, 3, 2, 0, 1)$$

- Aplicando la multiplicación:

$$\{f * g\}[n] = (6, \underline{4}, 0, 2) + (\underline{0}, 3, 2, 0, 1)$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- Ahora sumamos índice a índice (si no aparece vale 0):

$$\{f * g\}[n] = (6+0, 4+0, 0+3, 2+2, 0+0, 0+1)$$

Ejercicio 1: convolución lineal

- Ahora sumamos índice a índice (si no aparece vale 0):

$$\{f * g\}[n] = (6+0, 4+0, 0+3, 2+2, 0+0, 0+1)$$

- Desarrollo la suma y queda:

$$\{f * g\}[n] = (6, \underline{4}, 3, 4, 0, 1)$$

- Observamos que nos queda una secuencia de largo 6, lo que cumple con que el largo de la convolución de una secuencia de largo N con una de largo M queda de largo M+N-1.

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Ejercicio 2: convolución lineal

Encuentre la convolución lineal entre las funciones $f[n] = 2^n$ y $g[b] = u[n]$.

Ejercicio 2: convolución lineal

Encuentre la convolución lineal entre las funciones $f[n] = 2^n$ y $g[b] = u[n]$.

- Para comenzar, planteamos la sumatoria:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

Ejercicio 2: convolución lineal

Encuentre la convolución lineal entre las funciones $f[n] = 2^n$ y $g[b] = u[n]$.

- Para comenzar, planteamos la sumatoria:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

- Ahora reemplazamos las funciones del enunciado:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]2^{n-k}$$

Ejercicio 2: convolución lineal

Encuentre la convolución lineal entre las funciones $f[n] = 2^n$ y $g[b] = u[n]$.

- Para comenzar, planteamos la sumatoria:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

- Ahora reemplazamos las funciones del enunciado:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]2^{n-k}$$

- El escalón hará que la sumatoria parta en 0 y dividimos las potencias de 2

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-k}$$

Ejercicio 2: convolución lineal

- Podemos sacar el 2^n de la suma porque es constante respecto a k. También podemos escribir 2^{-k} como $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Por lo que queda:

$$\{f * g\}[n] = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Ejercicio 2: convolución lineal

- Podemos sacar el 2^n de la suma porque es constante respecto a k. También podemos escribir 2^{-k} como $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Por lo que queda:

$$\{f * g\}[n] = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- Notamos que la sumatoria es una **serie geométrica**. Belén note: usted puede olvidar su nombre, pero no puede olvidar la serie geométrica. Esto significa que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Ejercicio 2: convolución lineal

- Finalmente, reemplazamos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2$$

En

$$\{f * g\}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n} \cdot 2^{-k}$$

Quedando:

$$\{f * g\}[n] = 2^{n+1}$$

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Resumen: sistemas LTI discretos

- Todo sistema LTI está caracterizado por su respuesta al impulso, ya que se cumple que la salida siempre corresponderá a la convolución lineal entre la señal de entrada y la respuesta al impulso.

Resumen: sistemas LTI discretos

- Todo sistema LTI está caracterizado por su respuesta al impulso, ya que se cumple que la salida siempre corresponderá a la convolución lineal entre la señal de entrada y la respuesta al impulso.
- En el mundo discreto se define la función impulso como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Resumen: sistemas LTI discretos

- Todo sistema LTI está caracterizado por su respuesta al impulso, ya que se cumple que la salida siempre corresponderá a la convolución lineal entre la señal de entrada y la respuesta al impulso.
- En el mundo discreto se define la función impulso como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

- Luego, la respuesta al impulso de un sistema corresponde a la señal de salida ante un impulso como señal de ingreso, usualmente se denota con h.

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h[n]$$

Contenido

1. Resumen: señales discretas
2. Ejercicio 1: señales discretas
3. Resumen: ecuaciones en diferencias
4. Ejercicio 1: ecuaciones en diferencias
5. Ejercicio 2: ecuaciones en diferencias
6. Resumen: convolución lineal
7. Ejercicio 1: convolución lineal
8. Ejercicio 2: convolución lineal
9. Resumen: sistemas LTI discretos
10. Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Encuentre la respuesta al impulso del sistema:

$$y[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]$$

Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Encuentre la respuesta al impulso del sistema:

$$y[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]$$

- Este sistema tiene forma muy parecida a una convolución lineal como:

$$g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1[m] * x[n-m]$$

con la única diferencia de que el límite de la suma inferior es 0.

Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Encuentre la respuesta al impulso del sistema:

$$y[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]$$

- Este sistema tiene forma muy parecida a una convolución lineal como:

$$g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1[m] * x[n-m]$$

  con la única diferencia de que el límite de la suma inferior es 0.
- La interpretación de este hecho es que se está convolucionando por una señal escalón en vez de una señal uno. Es decir:

$$g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[m] * x[n-m]$$

Ejercicio 2: sistemas LTI discretos

Encuentre la respuesta al impulso del sistema:

$$y[n] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]$$

- Este sistema tiene forma muy parecida a una convolución lineal como:

$$g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1[m] * x[n-m]$$

  con la única diferencia de que el límite de la suma inferior es 0.
- La interpretación de este hecho es que se está convolucionando por una señal escalón en vez de una señal uno. Es decir:

$$g[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[m] * x[n-m]$$

- Así, como se sabe que $g[n] = x[n] * h[n]$, la respuesta al impulso es $u[n]$.