Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 0

12 de Agosto de 2022

Belén Bravo Kunz - bkbravo@uc.cl
Michel Rozas Fernández - mvrozas@uc.cl
Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl
Iñaki Gacitúa Núñez - igacituan@uc.cl

Resumen

El objetivo de esta ayudantía es repasar y nivelar los contenidos matemáticos necesarios para enfrentar el curso de señales y sistemas. Para esto es necesario repasar algunos tópicos fundamentales. Además, se repasarán contenidos enseñados en cátedra la primera semana del curso.

Números complejos

- Los números complejos son el conjunto de números que contiene a su vez a los números reales y a los imaginarios.
- La unidad imaginaria i es aquel número que satisface la ecuación:

  $$x^2 = -1$$

  Tal que:

  $$x = \pm i$$

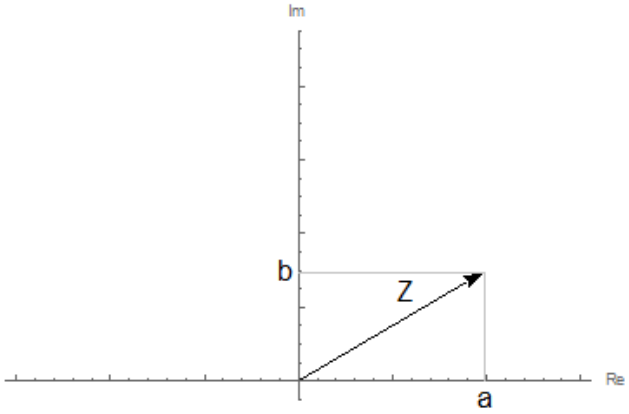
- Los números complejos son de la forma:

  $$Z = a + bi$$

  Donde:

  - a corresponde a la **parte real** de Z
  - b corresponde a la **parte imaginaria** de Z
  - El módulo de Z es $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- La representación en el plano complejo es de la forma:



- El ángulo α de inclinación de Z respecto al eje x es:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- La fórmula de Euler indica:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$$

A partir de ella se pueden escribir las funciones trigonométricas seno y coseno en forma exponencial:

$$\sin(x) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos(x) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Funciones

Una función es una relación entre un conjunto de números (dominio) y otro (recorrido) en la que todos los elementos del conjunto de salida tienen asignado un único elemento en el conjunto de llegada y la forma de asignación de elementos corresponde a una relación matemática.
La expresión $f(x) = y$ significa que tomo un número x del conjunto de salida y lo transformo en un número y del conjunto de llegada mediante una relación f.

Continuidad

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un punto a si se cumple que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Es decir, el límite de la función cuando esta tiende al punto es igual a la función evaluada en el punto.

Simetrías

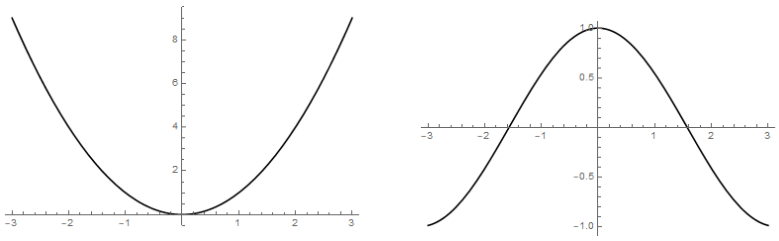
La comprensión de las simetrías es una herramienta que será de alta utilidad más adelante en el curso. Las simetrías más importantes son:

- Función par:

  Una función es par cuando para todos los puntos de su dominio se cumple que:

  $$f(x) = f(-x)$$

  En el gráfico:

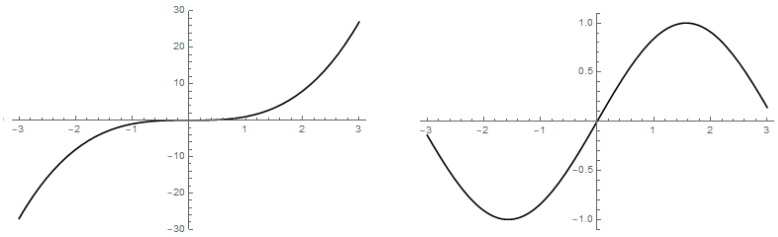


- Función impar:

  Una función es impar cuando para todos los puntos de su dominio se cumple que:

  $$f(x) = -f(-x)$$

  En el gráfico:



- Función hermitiana:

  Una función compleja es hermitiana si tiene:

  - Parte real par
  - Parte imaginaria impar

- Función anti-hermitiana:

  Una función compleja es anti-hermitiana si tiene:

  - Parte real impar
  - Parte imaginaria par

- Toda función se puede escribir como la suma de una parte par y una parte impar:

$$\text{par}\{f(x)\} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{impar}\{f(x)\} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Sumas

Saber algunas sumas especiales será de vital importancia para resolver problemas en el futuro, **spoiler: es especialmente importante saber resolver series geométricas para calcular transformadas z, no olviden mi consejo y aprendan a reconocerlas y a reconocer la fórmula**

- **Suma aritmética**

  Una progresión aritmética se define como:

$$a_n = \begin{cases} b & si \quad n = 1 \\ a_{n-1} + d & si \quad n > 1 \end{cases}$$

  Donde d es una constante que corresponde a la diferencia entre dos términos sucesivos.

  La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética está dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- **Suma geométrica**

  Una suma geométrica corresponde a la suma de n términos seguidos que tienen una razón constante entre términos. El valor de la suma de los primeros n términos es:

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Si ahora consideramos un r tal que $|\mathbf{r}| < \mathbf{1}$ podemos calcular la suma infinita de los términos de la progresión geométrica, tal que:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}}$$

Integrales

Para entender los contenidos fundamentales de señales y sistemas **es muy importante saber integrar y saber las propiedades de la integral como operador**.
La integral indefinida:

$$\int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + c$$

Nos indica que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$$

Considerando esto, el teorema fundamental del cálculo indica:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = F(b) - F(a)$$

Cuando los extremos tienden a infinito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{b\to-\infty} F(a)$$

La integral es un operador lineal, esto significa que:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ \mathrm{dx} = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b \alpha g(x)$$

Para ser exitosos no podemos olvidar la integración por partes:

$$\boxed{\int u\ dv = uv - \int v\ du}$$

Señales

Definición: Son transmisores de información que se pueden tratar matemáticamente como funciones de una variable independiente, la forma en que la función evoluciona en la medida que cambia la variable independiente contiene la información. Pueden ser modificadas por un sistema.

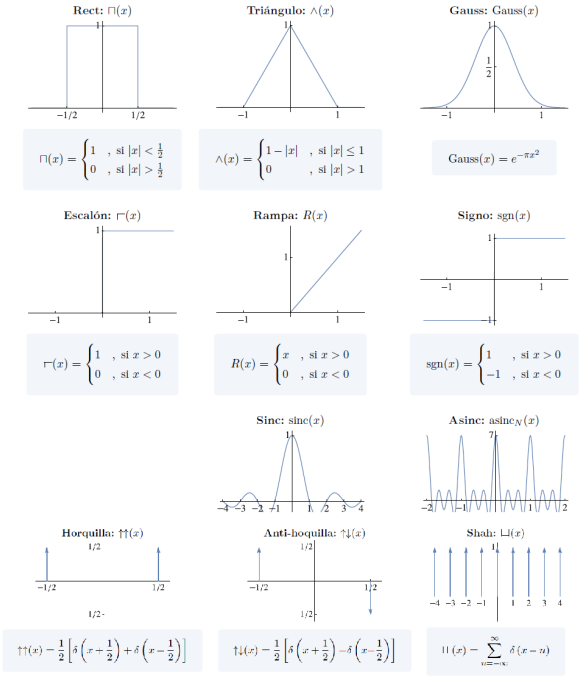
Clasificación según la naturaleza de la variable independiente:

- **Señales Continuas:** son aquellas que toman un valor para todos los valores de la variable independiente.
- **Señales Discretas:** son aquellas que solo toman valores para algunos puntos de la variable independiente.
- **Señales Digitales:** corresponden a las señales que toman valores acotados y solo para algunos valores de la variable independiente.

Observación: una señal continua puede ser presentada matemáticamente por una función discontinua.

Señales importantes:

Hay un grupo particular de funciones que nos interesarán para el modelamiento de señales.



Sistemas

Definición: Son mecanismos que transforman señales.

Tipos de sistemas:

- **Causales:** Son aquellos en que la salida solo depende del estado actual y de estados pasados. No se adelantan.
- **Invariantes:** L(f(x+a)) = g(x+a)
- **Linealidad:** un sistema $L\{x(t)\}$ es lienal cuando cumple homogeneidad y superposición.
  1. $L\{x(t)\}$ es homogeneo si $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  2. $L\{x(t)\}$ cumple con superposición si $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$
- **LTI:** lineales e invariantes.
- **Con memoria:** requieren estados pasados.
- **Estables:** a entradas acotadas entregan salidas acotadas.
- **Invertibles:** si un sistema tiene un sistema inverso con el que al conectarse en serie la salida da la entrada, es invertible.

Ejercicios

1. Determine la parte real y parte imaginaria de los siguientes números:

   a) $2 + 3i$

   Parte real: 2 Parte imaginaria: 3

   b) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

   Para resolver esto es necesario utilizar la fórmula de Euler:

   $$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

   Sustituyendo $\theta = \frac{\pi}{3}$:

   $$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

   Los valores de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ son conocidos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces, sustituyendo estos velores en la fórmula de Euler tendremos:

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto tendremos que:

$$\text{Parte real:}\frac{1}{2} \qquad \text{Parte imaginaria: } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $\ln(-1)$

Pare resolver esto es necesario tener en mente la definición de logaritmo natural:

$$\ln(a) = b \quad | \quad e^b = a$$

Es decir, lo que nos están preguntando es: ¿A qué exponente debo elevar e para que el valor numérico de la potencia sea -1? Para resolver esto, observo la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Notamos que estamos buscando un ángulo que tenga coseno -1 y seno cero. Todos los múltiplos enteros impares de π cumplen con esto, por lo tanto:

$$\ln(-1) = i(2k+1)\pi \quad \forall \quad k \in \mathrm{Z}$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$\text{Parte real:0} \qquad \text{Parte imaginaria: } (2k+1)\pi$$

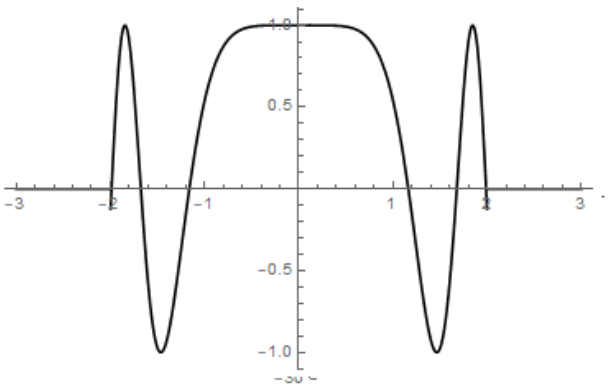
d) $\sqrt{i}$

Para resolver esto es necesario escribir i de alguna forma conveniente. Esto se puede realizar usando la fórmula de Euler:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

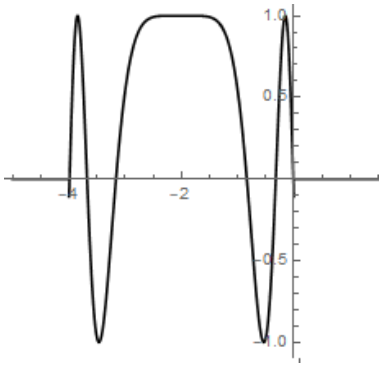
2. Funciones:

- La señal de prueba IEE2103-STARTING (t) tiene el siguiente gráfico:

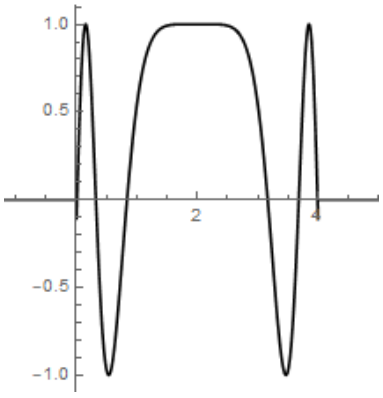


- Determine la simetría de la señal IEE2103-STARTING (t)
  La señal IEE2103-STARTING (t) es **par**, ya que se cumple que IEE2103-STARTING (t) = IEE2103-STARTING (-t)
- Sea a una constante real positiva, grafique:

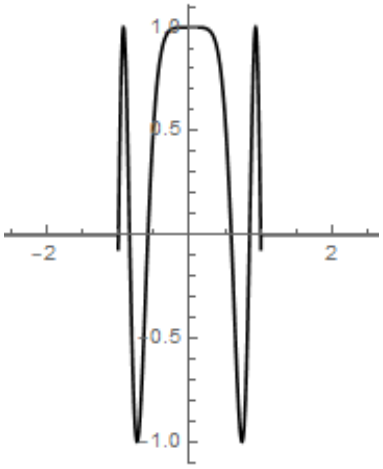
a) IEE2103-STARTING (t + a)



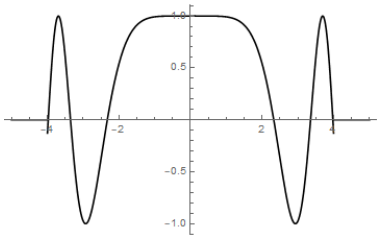
b) IEE2103-STARTING (t - a)



c) IEE2103-STARTING ($a \cdot t$)



d) IEE2103-STARTING $(\frac{t}{a})$



- Descomponga la parte real e imaginaria de $f(x) = x^3 + x^2 + i \cdot cos(x) + i \cdot sin(x)$ en sus respectivas partes par e impar. Lo primero es identificar que $Re\{f(x)\} = x^3 + x^2$ y $Im\{f(x)\} = cos(x) + sin(x)$. Luego, se aplican las fórmula de descomposición en cada parte como sigue:

$$P(Re\{f(x)\}) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - x^3 + x^2) = x^2$$
$$I(Re\{f(x)\}) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 + x^3 - x^2) = x^3$$

$$P(Im\{f(x)\}) = \frac{1}{2}(cos(x) + sin(x) + cos(x) - sin(x)) = cos(x)$$
$$I(Im\{f(x)\}) = \frac{1}{2}(cos(x) + sin(x) - cos(x) + sin(x) = sin(x)$$

3. Sumas:

   a) Calcular el valor numérico de:

$$\sum_{n=0}^{100} \left(\frac{1}{28}\right)^n$$

   Para resolver esto es necesario reconocer que los términos a sumar corresponden a los de una progresión geométrica con $r = \frac{1}{28}$, luego, el valor de la suma es:

$$\sum_{n=0}^{100} \left(\frac{1}{28}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{28}\right)^{100+1}}{1 - \left(\frac{1}{28}\right)}$$

   b) Calcular el valor numérico de:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

   Para resolver esto es necesario notar que al tomar valor absoluto estamos tomando dos veces la suma de cero a infinito, es decir:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} = -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

   Podemos observar que la expresión de la derecha es una serie geométrica que **converge** porque $|r| < 1$, luego, se puede sustituir en la fórmula:

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - 1 = 3$$

   Finalmente se obtiene que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} = 3$$

4. Integrales:

   a) Suponga $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x...}}}}$ encuentre el valor numérico de:

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx}$$

Para solucionar esto, comenzamos re escribiendo f(x) como multiplicación de potencias:

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x...}}}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot ...$$

Observemos que esto corresponde matemáticamente a:

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot ... = \prod_{n=2}^{\infty} x^{\frac{1}{n!}}$$

Observando que tenermos una multiplicación de potencias con igual base, usando propiedades de las potencias, el resultado de la multiplicación es la base elevado a la suma de los ecponenetes, tal que:

$$f(x) = \prod_{n=2}^{\infty} x^{\frac{1}{n!}} = x^{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

Para expresar $f(x)$ de tal forma que sea posible integrarla, resolvemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Podemos observar que esto es muy similar a la serie de Taylor de e^x si $x = 1$, observemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Entonces la expresión a resolver, sumando y restando los términos convenientes es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{0!} = e - 2$$

Entonces la función $f(x)$ es:

$$f(x) = x^{e-2}$$

Entonces, es posible integrarla como a una potencia, su antiderivada más general es:

$$\int x^{e-2}\ \mathrm{dx} = \frac{x^{e-1}}{x^{e-1}}$$

Luego, usando teorema fundamental del cálculo tendremos:

$$\int_0^1 x^{e-2} = \frac{1^{e-1}}{e-1} - \frac{0^{e-1}}{e-1}$$

Finalmente se obtiene que:

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{e-1}$$

b) Determine el valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 6\cos(3x)\ \mathrm{dx}$$

Esta integral **no converge** por lo que **no tiene un valor numéroco**.
Una forma fácil de verlo es utilizando el teorema fundamental del cálculo.
La antiderivada más general de $f(x) = 6\cos(3x)$ es:

$$\int 6\cos(3x)\ \mathrm{dx} = 2\sin(3x)$$

Si ahora calculamos como cualquier integral impropia la integral entre menos infinito e infinito tendremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 6\cos(3x)\ \mathrm{dx} = \lim_{x\to\infty} 2\sin(3x) - \lim_{x\to-\infty} 2\sin(3x)$$

Si observamos los límites:

$$\lim_{x\to\infty} 2\sin(3x) \qquad \lim_{x\to-\infty} 2\sin(3x)$$

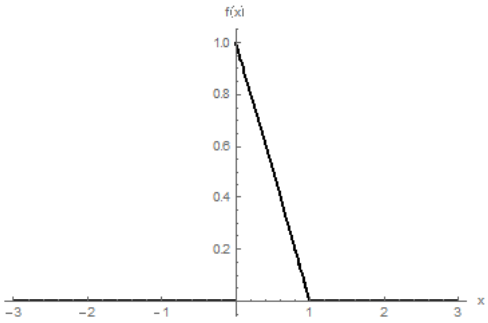
Podemos afirmar que ninguno de los dos existe, puesto que la función seno tiene un comportamiento oscilante, por lo que no es predecible cómo se comportará en el infinito. Además, no sabemos si la recta real es simétrica o no, por lo tanto, dado que infinito **no es un número**, no se pueden afirmar similitudes o diferencias entre el límite a más infinito y el límite a menos infinito.

5. Señales importantes:

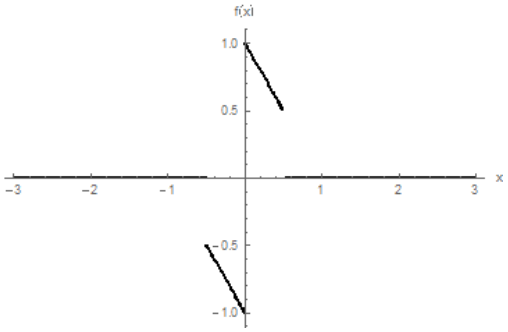
a) Escriba $\sqcap(x)$ en términos de la función escalón
Para esta resolución, llamaremos u a la función escalón:

$$\sqcap(x) = u\left(x - \frac{1}{2}\right) - u\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

b) Grafique la función $\wedge(x) \cdot u(x)$ donde u es escalón.



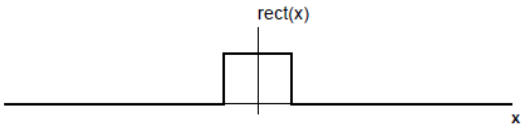
c) Grafique la funcion $\sqcap(x) \cdot \wedge(x) \cdot \text{sgn}(x)$



d) Dibuje las siguientes funciones, analice su continuidad y encuentre para cada una de ellas $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx$:

1) $f(x) = \sqcap(x)$

La función rect es un rectángulo de área 1 en la recta real centrado en cero, tal que la función vale 0 fuera del rectángulo y 1 entre $\frac{-1}{2}$ y $\frac{1}{2}$:



Se puede observar que **la función$\sqcap$(x) es continua en todo x distinto a $\frac{-1}{2}$ y $\frac{1}{2}$**, puesto que en ellos la función hace un "salto vertical.^entre dos puntos. ¿Por qué el salto vertical la hace discontinua? En cálculo aprendimos que una función f(x) es continua en un punto a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Observemos que para que esto se cumpla **el límite debe existir**, es decir, debe ser igual por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Al observar el gráfico de la función rect, analizando en el punto $\frac{-1}{2}$ tendremos que:

$$\lim_{x \to a^-} \sqcap(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a^+} \sqcap(x) = 1$$

Por lo tanto, la función $\sqcap(x)$ es discontinua en $\frac{-1}{2}$.
Repitiendo el análisis en $\frac{1}{2}$ se tiene:

$$\lim_{x \to a^-} \sqcap(x) = 1 \qquad \lim_{x \to a^+} \sqcap(x) = 0$$

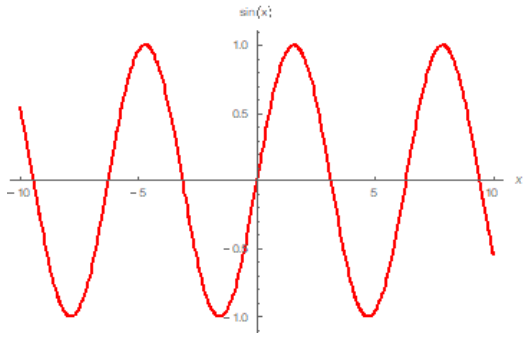
Por lo tanto, la función $\sqcap(x)$ es discontinua en $\frac{1}{2}$.
Utilizando su definición y considerando que fuera del rectángulo la función siempre vale cero el valor de su área sobre la recta real es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)dx = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1(x)dx$$

Resolviendo la integral de la derecha utilizando el teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)dx = 1$$

2) $f(x) = \sin(x)$
La función seno es la parte imaginaria de la exponencial compleja e^{ix} y también corresponde a la altura de un punto en el circulo unitario que está a un ángulo x respecto al eje horizontal. Observemos su gráfico:



Se puede observar que la función seno es **continua en todos los reales**, puesto que es periódica y para todo punto el límite por la izquierda y por la derecha de la función al punto son el valor de seno evaluado en el punto.
Sobre la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\ dx$$

Para resolver integrales impropias sabemos que debemos calcular la integral indefinida y usar el teorema fundamental del calculo con el valor del límite de la antiderivada cuando esta tiende al punto impropio, de esta forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\ dx = -\lim_{x\to\infty} \cos(x) + \lim_{x\to-\infty} \cos(x)$$

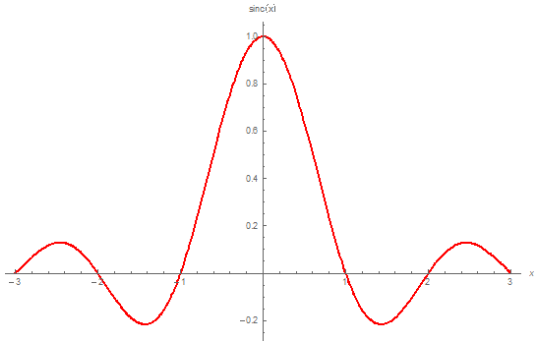
¿Cuanto valen esos límites? **No existen!** puesto que la función coseno es periódica y su comportamiento al infinito no es predecible.
Erroneamente se podría pensar que esta integral vale cero puesto que coseno es par por lo que se podría asumir que $\cos(-\infty) = \cos(\infty)$. **En sentido estricto esto está muy mal** puesto que **infinito no es un número**, por lo que no se puede asumir $\cos(-\infty) = \cos(\infty)$.
LA FUNCIÓN SENO NO ES INTEGRABLE

3) $f(x) = \text{sinc}(x)$

La función sinc se define como:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Esta función **es continua**, puesto que en cero (que es el único valor crítico que tiene) el valor del límite de la función **está definido como el valor de la función en el punto**.
El gráfico de la función es:



Y su integral **existe**, puesto que es menor que funciones integrables.

$$\sin(x) <= 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{-1}{\pi x} \leq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \leq \frac{1}{\pi x}$$

Ahora, la integral entre 0 e infinito (para los dos lados) de $\frac{1}{\pi x}$ existe, por lo tanto la de $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ debe existir, puesto que si la función es menor en magnitud, su área es menor en magnitud.

e) ¿Que es un sistema? Describa al menos 4 propiedades que pueden tener los sistemas.

Un sistema modifica y procesa una señal[**IrarrzavalMenaPablo1999Ads**]. Propiedades importantes que pueden tener los sistemas:

- Linealidad.
- Invariancia (no invarianza)
- Invertibilidad
- Estabilidad
- Causalidad

6. Sistemas LTI: Determinar si los siguientes sistemas con entrada f(x) y salida g(x) son LTI:

Un sistema es LTI si es lineal e invariante.

- Linealidad: un sistema $L\{x(t)\}$ es lienal cuando cumple homogeneidad y superposición.
  a) $L\{x(t)\}$ es homogeneo si $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  b) $L\{x(t)\}$ cumple con superposición si $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$
- Invariancia: un sistema es invariante si un retraso/adelanto en la entrada genera el mismo retraso/adelanto en la salida. Matemáticamente, si $g(t) = L\{x(t)\}$ es invariante, entonces $L\{x(t-\alpha)\} = g(t-\alpha)$.

Para probar invariancia hacemos esto:

Comenzamos tomando el caso de que un delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(t-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t-a)\}}} \longrightarrow h(t)$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t)\}}} \longrightarrow r(t) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow g(t)$$

Si el sistema es invariante siempre se obtendrá:

$$\boxed{\text{h(t) = g(t)}}$$

a) $g(x) = \cos(2\pi) f(x)$

Comenzamos probando linealidad:

- Homogeneidad: $\alpha L\{f(x)\} = L\{\alpha f(x)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\alpha L\{f(x)\} = \alpha \cos(2\pi) f(x)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

$$L\{\alpha f(x)\} = \alpha \cos(2\pi) f(x)$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.
- Superposición: $L\{f(x) + m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

$$L\{f(x) + m(x)\} = \cos(2\pi)[f(x) + m(x)] = f(x)\cos(2\pi) + m(x)\cos(2\pi)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

$$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = f(x)\cos(2\pi) + m(x)\cos(2\pi)$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x-\alpha)\} = g(x-\alpha)$
Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow f(x-a)\cos(2\pi)$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow f(t)\cos(2\pi) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a)\cos(2\pi)$$

Dado que la señal de salida es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es invariante**

b) $g(x) = 6x f(x)$
Comenzamos probando linealidad:

- Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$\alpha L\{f(t)\} = \alpha 6xf(x)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{\alpha f(t)\} = \alpha 6xf(t)$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.
- Superposición: $L\{f(x) + m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$L\{f(x) + m(x)\} = 6x[f(x) + m(x)]$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = 6xf(x) + 6xm(x) = 6x[f(x) + m(x)]$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x - \alpha)\} = g(x - \alpha)$
Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow f(x-a)6x$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow f(x)6x \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow 6f(x-a)(x-a)$$

Dado que la señal de salida no es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es variante**

c) $g(x) = \cos(x)f(x)$
Comenzamos probando linealidad:

- Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$\alpha L\{f(t)\} = \alpha \cos(x)f(x)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{\alpha f(t)\} = \alpha \cos(x)f(x)$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.

- Superposición: $L\{f(x)+m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$L\{f(x)+m(x)\} = \cos(x)[f(x)+m(x)]$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = \cos(x)f(x) + \cos(x)m(x) = \cos(x)[f(x)+m(x)]$$

  Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x-\alpha)\} = g(x-\alpha)$
Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow f(x-a)\cos(x)$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow f(x)\cos(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a)\cos(x-a)$$

Dado que la señal de salida no es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es variante**

d) $g(x) = \sqrt[3]{f(x)} + 2$ Comenzamos probando linealidad:

- Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

  $$\alpha L\{f(t)\} = \alpha(\sqrt[3]{f(x)} + 2)$$

  Luego, desarrollamos el lado derecho:

  $$L\{\alpha f(t)\} = \sqrt[3]{\alpha f(x)} + 2$$

  Notamos que los resultados obtenidos no son iguales, por lo tanto **no se cumple homogeneidad**. Por lo tanto se concluye que **el sistema no es lineal.**

A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x-\alpha)\} = g(x-\alpha)$
Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow \sqrt[3]{f(x-a)} + 2$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow \sqrt[3]{f(x)} + 2 \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow \sqrt[3]{f(x-a)} + 2$$

Dado que la señal de salida es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es invariante**