P1

$$F(z) = \arctan(z)$$

Propiedad $\quad n \cdot x[n] \xrightarrow{T.Z} -z \cdot \frac{d}{dz}(X(z))$

$$\Leftrightarrow \quad G(z) = -z \cdot \frac{d}{dz}(\arctan(z)) = \frac{-z}{1+z^2}$$

Los polos de esta fracción son i e $-i$

Aplicamos teorema de residuos:

$$\text{Res}(z^{n-1} \cdot G(z), i) = \lim_{z \to i} z^{n-1} \cdot \frac{-z \cdot (z-i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{-i^n}{2i}$$

$$\text{Res}(z^{n-1} \cdot G(z), -i) = \lim_{z \to -i} z^{n-1} \cdot \frac{-z \cdot (z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{-(-i)^n}{2i}$$

$$g[n] = -\frac{1}{2}\left(i^{n-1} + (-i)^{n-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot f[n] = -\frac{1}{2}\left(i^{n-1} + (-i)^{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow f[n] = -\frac{1}{2n}\left(i^{n-1} + (-i)^{n-1}\right) \Gamma[n-1] + f[0] \cdot \delta[n]$$

$$f[0] = \lim_{z \to +\infty} F(z) = \lim_{z \to +\infty} \arctan(z) = \frac{\pi}{2}$$

$$f[n] = -\frac{1}{2n}\left(i^{n-1} + (-i)^{n-1}\right) \Gamma[n-1] + \frac{\pi}{2} \cdot \delta[n]$$

P2)

$\delta[n] = r[n-1] - r[n] \xrightarrow[\text{LTI}]{\text{Sistema}} h[n] = h_r[n-1] - h_r[n]$

Periodico (periodo 5)

$h[n] = (0, \underline{1}, 1, 2, 4, 8, -15, 1, 2, 4, 8, -15, \dots)$

$g[n] = g[n-5]$, esta estructura asegura periodicidad cada 5

$g[n] = g[n-5] + \delta[n]$, agregando un delta inicializamos el valor para $n=0$, y este valor se replicara en todos los $n = 5k$, con $k \in \mathbb{N}$
Esto daria $(\underline{1}, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1 \dots)$

$g[n] = g[n-5] + \delta[n] + \delta[n-1] + 2\cdot\delta[n-2] + 4\cdot\delta[n-3] + 8\cdot\delta[n-4]$

Basandonos en lo anterior, con esta formula inicializamos los valores de las otras posiciones.

$(\underline{1}, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, \dots)$

Nos falta unicamente corregir el valor en las posiciones $5K$ para $K \geq 1$

$g[n] = g[n-5] + \delta[n] + \delta[n-1] + 2\cdot\delta[n-2] + 4\cdot\delta[n-3] + 8\cdot\delta[n-4] - 16\cdot\delta[n-5]$

Con esto generamos $h[n]$.

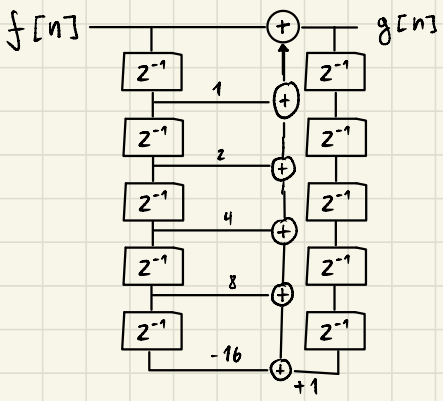
Como $h[n]$ es $g[n]$ para entrada $f[n] = \delta[n]$, reescribimos

$g[n] = g[n-5] + f[n] + f[n-1] + 2\cdot f[n-2] + 4\cdot f[n-3] + 8\cdot f[n-4] - 16\, f[n-5]$

Aplicamos T.Z

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \frac{(1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + 8\cdot z^{-4} - 16\cdot z^{-5})}{(1 - z^{-5})} = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}$$

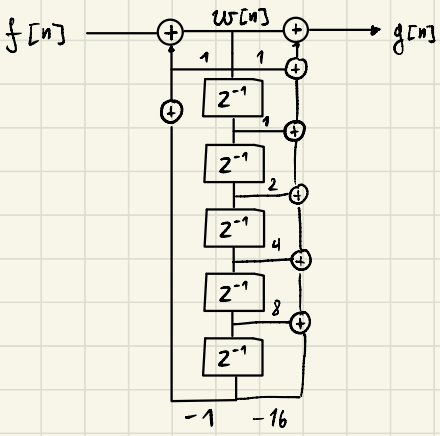
b) Forma Directa I



Forma Directa II

$$F(z) \cdot H_2(z) = W(z)$$

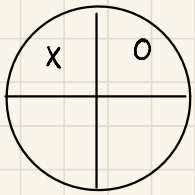
$$W(z) \cdot H_1(z) = G(z)$$

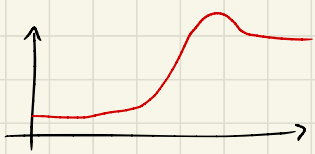


P3

a) Para banda

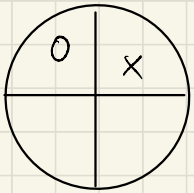
b) a)

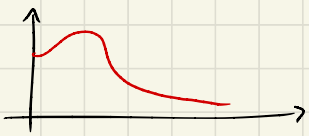




Para Altos

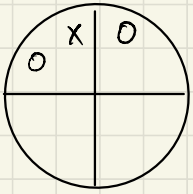
b)

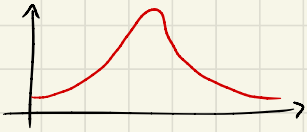




Para bajos

c)





Para banda

c) el tercero, y podemos mejorarlo aumentando los polos cerca de la banda pasante y aumentar los ceros en las bandas rechazadas.

d) $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T + j\omega T}$

$0 < \omega \cdot T < \pi$ (Esto es la parte superior del circulo unitario del plano z)

$\omega_{max} \cdot T = \pi \iff T = \frac{\pi}{\omega_{max}} = \frac{1}{2 f_{max}}$ (Nos da lo mismo que Nyquist)

Este valor de T nos permite filtrar exactamente como queremos para f entre 0 y f_{max}.

e)

$\frac{70+1000}{2}$

$a = A_1 \cdot e^{j 2\pi \cdot 535 \cdot T}$ $(A_1 < 1)$

$b = A_2 \cdot e^{j 2\pi \cdot 1000 \cdot T}$

$c = A_3 \cdot e^{j 2\pi \cdot 70 \cdot T}$

Así está centrado en mi pasabanda y corta en 70 y 1000 aprox.

P4

a) Estabilidad:

$|z_p| < 1$

$z^2 + cz + d = 0 \iff z_p = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d}}{2}$

$\iff |z_p| < 1 \iff \left| \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4d}}{2} \right| < 1$

b)

$\lim_{n \to +\infty} e[n] = 0 \iff \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot E(z) = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1) \cdot z}{z-1} \cdot \frac{z^2 + az + b}{z^2 + cz + d} = 0$

$\frac{1+a+b}{1+c+d} = 0 \iff 1 + a + b = 0$ //

P5)

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^N}$$

Los polos son las soluciones de:

$$1 - z^N = 0 \iff z_{pk} = e^{\frac{i 2\pi k}{N}} = w_k$$

$$\text{Res}(z^{n-1} \cdot F(z), w_k) = \lim_{z \to w_k} \frac{z^{n-1} \cdot (z - w_k)}{1 - z^N} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} w_k^{n-1} \cdot \lim_{z \to w_k} \frac{1}{-N \cdot w_k}$$

$$= -\frac{w_k^n}{N}$$

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{-w_k^n}{N} \Gamma[n] = \frac{-1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{i 2\pi \cdot k \cdot n}{N}} \cdot \Gamma[n]$$

Respuesta correcta

Pero si queremos ir más allá:

Para $n \equiv 0 \; [N]$

$$f[n] = \frac{-1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = -1$$

Para $n \not\equiv 0 \; [N]$

$$f[n] = \frac{-1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{i 2\pi \cdot k \cdot n}{N}} = \frac{-1}{N} \cdot \frac{1 - e^{i 2\pi n}}{1 - e^{\frac{i 2\pi n}{N}}} = 0$$

(1, ya que $n \in \mathbb{N}$)

$$f[n] = (\underbrace{-1, 0, 0, \cdots, 0}_{N}, -1, 0, \cdots)$$

Sería una especie de $-\coprod_N[n]$, (ojo que $\coprod_1[n] = \Gamma[n]$)

(Esto me lo inventé yo y no lo vi en ningún libro, osea que no lo tomen como referencia)

$$\coprod_N[n] = \sum_{K=0}^{+\infty} \delta[n - K \cdot N] \quad \overset{T.Z}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{z^N - 1}$$